中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

关于镜像对称性的理论和相关应用

PB22000007 陈嘉莘
指导老师：王昕 副研究员

中国科学技术大学，少年班学院
彭桓武高能基础理论研究中心

2025 年 10 月 31 日

目录

在上世纪的弦理论研究中，人们发现在 Type IIA,B 型超弦理论的紧致化里面，不同的两个 Calabi-Yau 流形可能得到相同的紧致理论 [1]，这随后被表达为两个不同的 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论（SCFT）的对应关系或两个 Calabi-Yau 流形的对应关系。
由于对应的两个 Calabi-Yau 流形的 Hodge 菱形（Hodge Diamond）的镜像性质，这样的对应关系称为镜像对称性（Mirror Symmetry）。若干研究表明镜像对称性是 Calabi-Yau 甚至其他流形的一般性的对应关系。[2]
我将从镜像对称性的物理起源出发，叙述镜像对称性在物理的一般表达和证明，讨论镜像对称性的构造，叙述镜像对称性在物理中的更多应用，讨论镜像对称性的其他数学结构。

本研究是镜像对称性的发展与应用在相关理论中的综述，我通过阅读前人的文献和书籍并以叙述性的语言整理，在整理的过程中学习镜像对称性和与其相关的拓扑弦理论，超对称场论和相关的数学结构。

镜像对称性最一般的来自于 $\mathcal{N}=(2,2)$ 代数的对称性，对生成元为 $\{Q_\pm,\bar{Q}_\pm,H,P,M\}$ 的 $\mathcal{N}=(2,2)$ 代数

$$\begin{aligned}
&Q_\pm^2=\bar{Q}_\pm^2=0\\
&\{Q_\pm,\bar{Q}_\pm\}=H\pm P\\
&\{\bar{Q}_+,\bar{Q}_-\}=Z,\quad \{Q_+,Q_-\}=Z^*\\
&\{Q_-,\bar{Q}_+\}=\tilde{Z},\quad \{Q_+,\bar{Q}_-\}=\tilde{Z}^*\\
&[iM,Q_\pm]=\mp Q_\mp,\quad [iM,\bar{Q}_\pm]=\mp\bar{Q}_\pm
\end{aligned}\tag{1}$$

与及其相关的 R 对称性（R-Symmetry）的代数

$$\begin{aligned}
&[iF_V,Q_\pm]=-iQ_\pm,\quad [iF_V,\bar{Q}_\pm]=i\bar{Q}_\pm\\
&[iF_A,Q_\pm]=\mp iQ_\pm,\quad [iF_A,\bar{Q}_\pm]=\pm i\bar{Q}_\pm
\end{aligned}\tag{2}$$

在进行如下称为镜像自同构的代数生成元交换时，代数关系不发生变化：

$$
\begin{aligned}
Q_- &\longleftrightarrow \bar{Q}_- \\
F_V &\longleftrightarrow F_A \\
Z &\longleftrightarrow \tilde{Z}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

同时我们还有两种只改变 $P\to -P,\quad M\to -M$ 的变换，称为 A 和 B 宇称（A,B Parity），其中 A 宇称定义为

$$\begin{aligned} Q_- \leftrightarrow \bar{Q}_+, \quad \bar{Q}_- \leftrightarrow Q_+ \\ F_V \to -F_V, Z \leftrightarrow Z^* \end{aligned} \tag{4}$$

B 宇称定义为

$$\begin{aligned} Q_- \leftrightarrow Q_+, \bar{Q}_- \leftrightarrow \bar{Q}_+ \\ F_A \to -F_A, \tilde{Z} \leftrightarrow \tilde{Z}^* \end{aligned} \tag{5}$$

而这两个变换在镜像自同构下互换

Hori 和 Vafa 给出了镜像对称性用与 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称理论的物理证明 [3]，他们通过论证线性 Sigma 模型（GLSM）在低能下有效理论为 Toric 簇（Toric Variety）作为 Target Space 的非线性 Sigma 模型，同时论证线性 Sigma 模型在进行 T duality 时会得到有如下 twisted superpotential 的 Landau-Ginzburg 模型，证明了非线性 Sigma 模型和 Landau-Ginzburg 模型的对应。(以 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 为例)

$$\tilde{W}=e^{-Y_1}+\cdots+e^{-Y_{n-1}}+e^{Y_1+\cdots+Y_{n-1}-t} \tag{6}$$

由于使得 R 对称性（R Symmetry）无量子反常的非线性 Sigma 模型和 Landau-Ginzburg 模型均要求 target space 为 Calabi-Yau 流形，这样的对偶性意味着两个 Calabi-Yau 流形的对偶性。他们进一步说明了可以通过添加更多约束来使得两个模型的 Target space 为 Toric 簇中的超曲面 [3]，这意味着这样的 Calabi-Yau 流形可以是 Local Calabi-Yau 流形。

人们也可以用世界面超对称（Worldsheet Supersymmetry）来进一步说明 Calabi-Yau 流形之间对应的细节，这是通过论证 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超共形理论的 chiral 和 anti-chiral 环与 Dolbeault 上同调环的同构，以及利用 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超共形理论的谱流（Spectral Flow）进行的。经过 chiral 和 anti-chiral ring 的关系

$$\mathcal{R}_{cc}^{p,q} \longleftrightarrow H^{p,q}(M) \longleftrightarrow \mathcal{R}_{ac}^{-p,q} \tag{7}$$

说明了

$$H^{p,q}(M) \simeq H^{n-p,q}(M) \tag{8}$$

意味着对 Hodge 菱形的“镜像”

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & {\color{red}h^{1,1}} & & 0 & \\
1 & & {\color{blue}h^{2,1}} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\check{X} & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & {\color{blue}h^{1,1}} & & 0 & \\
1 & & {\color{red}h^{2,1}} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

图: Hodge 菱形

人们引入了 Topological Twist 来使得 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称理论只保留 Target Space 的拓扑贡献 [4][6]，其中有 A，B 两类 Twist

$$M_E' = M_E + R_i \quad (R_A = F_V \; R_B = F_A) \tag{9}$$

在这两类 Twist 下，利用超对称局部化原理，A twisted 的非线性 Sigma 模型和 B twisted 的 Landau-Ginzburg 模型的关联函数分别只有全纯稳定（Stable）映射

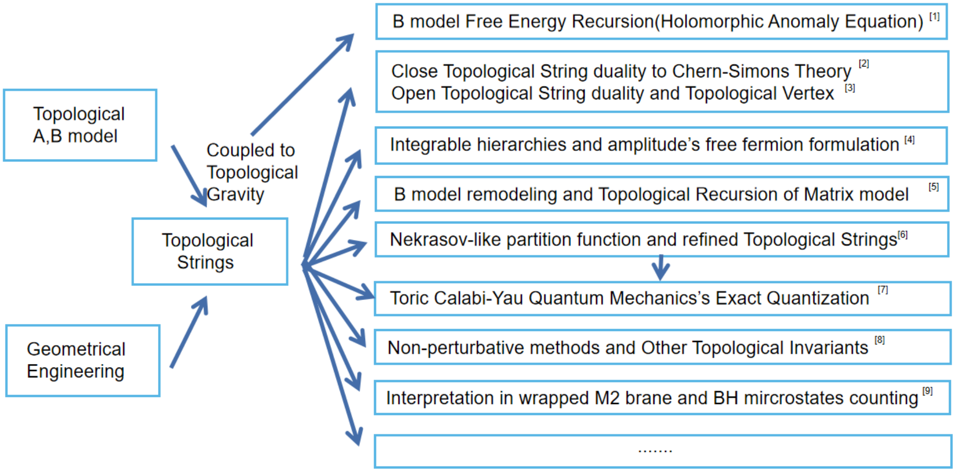
$$\partial_{\bar{z}}\phi^i = 0 \quad \phi_*[\Sigma] = \beta \tag{10}$$

和到 W 的极值点的常值映射

$$\partial_\mu \phi^i = 0 \quad \partial_i W = 0 \tag{11}$$

而前者对应了数学上的 Gromov-Witten 不变量，后者则在特殊情况下可以精确计算。这提供了计算 Gromov-Witten 不变量的新方式 [5]。人们随后将拓扑场论升级为拓扑弦理论，得到了更多与其他理论的联系 [7][8][9][10][11]。

拓扑弦理论的更多联系



[1]hep-th/9309140 [2]hep-th/9811131 [3]hep-th/0305132 [4]hep-th/0312085 [5]0709.1453 [6]hep-th/0701156,1009.1126
[7]1410.3382 [8]Especially Resurgence method [9]hep-th/9809187

图: 拓扑弦理论的更多联系

- Greene-Plesser 构造 [12]
  在 [12] 中，Greene-Plesser 利用 $\mathbb{P}^4$ 中的 5 次超曲面作为镜像对称的一侧，以这个超曲面在
  $$G = \{(a_0, \ldots, a_4) \in \mathbb{Z}_5^5 | \sum_i a_i = 0\} \tag{12}$$
  的作用后进行 singularity resolution 得到的 Calabi-Yau 作为镜像对称的另一侧，构造了知名的 Quintic 例子。Candelas 后续详细计算了这个例子 [5]。这种构造具有一定的一般性。
- Batyrev 构造 [13]
  利用 Toric 簇的 polytope 表达推广了 Greene-Plesser 构造，并说明了 Greene-Plesser 构造是此时的特例。Batyrev 进一步证明了是 reflective polytope 的 Calabi-Yau Toric 簇的 polar polytope 对应着其镜像对称 Calabi-Yau，并自然给出了任意维度 Toric Calabi-Yau 镜像对称性的构造。

- Hori-Vafa 的证明也可以视作类似的构造，是 Batyrev 构造用线性 Sigma 模型的表达。此时 A 模型是非线性 Sigma 模型而 B 模型是 Landau-Ginzburg 模型。非线性 Sigma 模型的 Target Space 是一侧的 Toric 簇，Landau-Ginzburg 模型可以视为增加了 twisted superpotential 约束的 Toric 簇。
- 此外人们也有 Berglund-H$\ddot{u}$bsch-Krawitz 构造等在 Toric 簇上的构造方式 [14], [15]。Berglund-H$\ddot{u}$bsch-Krawitz 构造推广了 Hori-Vafa 构造使其 A，B 模型均为 Landau-Ginzburg 模型。
- 很多这些方法可以被推广到 Calabi-Yau 之外的一些空间，如 Fano 流形等 [19][20]。

- Strominger-Yau-Zaslow Conjecture 与镜像对称性
  在 [16] 中，Strominger-Yau-Zaslow 利用 special Lagrangian D 膜和 holomorphic D 膜这两种特殊的 D 膜分别对应至 A 和 B 模型，并猜测对一对镜像对称的 n 维 Calabi-Yau，均可以视作有 n 维 torus 作为纤维的两个这样的 D 膜作为底空间所构造得来的。而这两个 n-torus 以 T 对偶

$$R \leftrightarrow \frac{1}{R} \tag{13}$$

  相关联。
  这个猜想不仅在数学上非常优美和具有一般性，更使得前文中的拓扑 A，B 模型中有了 D 膜的参与。

- Kontsevich Conjecture 与同调镜像对称性
  在 [17] 中更一般的将镜像对称性推广到对一侧的 X 的 Lagrangian 子流形构成的 Fukaya Category 和另一侧的 $\hat{X}$ 的 coherent sheaves 的 Derived Category 的对应关系，并命名为同调镜像对称性。

$$Fuk(X) \simeq D^b_\infty(\hat{X}) \tag{14}$$

  尽管这更早且更一般，但除了少数例子 [18][21][22] 之外无法给出构造镜像对称性的方法。

谢谢各位老师和同学，
请批评指正！

- W. Lerche, C. Vafa and N. P. Warner, Nucl. Phys. B **324**, 427-474 (1989) doi:10.1016/0550-3213(89)90474-4
- P. Candelas, M. Lynker and R. Schimmrigk, Nucl. Phys. B **341**, 383-402 (1990) doi:10.1016/0550-3213(90)90185-G
- K. Hori and C. Vafa, [arXiv:hep-th/0002222 [hep-th]].
- E. Witten, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 2775-2792 (1991) doi:10.1142/S0217751X91001350
- P. Candelas, X. C. De La Ossa, P. S. Green and L. Parkes, Nucl. Phys. B **359**, 21-74 (1991) doi:10.1016/0550-3213(91)90292-6
- E. Witten, Commun. Math. Phys. **118**, 411 (1988) doi:10.1007/BF01466725

- M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, Commun. Math. Phys. **254**, 425-478 (2005) doi:10.1007/s00220-004-1162-z [arXiv:hep-th/0305132 [hep-th]].
- M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, Commun. Math. Phys. **261**, 451-516 (2006) doi:10.1007/s00220-005-1448-9 [arXiv:hep-th/0312085 [hep-th]].
- V. Bouchard, A. Klemm, M. Marino and S. Pasquetti, Commun. Math. Phys. **287**, 117-178 (2009) doi:10.1007/s00220-008-0620-4 [arXiv:0709.1453 [hep-th]].
- A. Grassi, Y. Hatsuda and M. Marino, Annales Henri Poincare **17**, no.11, 3177-3235 (2016) doi:10.1007/s00023-016-0479-4 [arXiv:1410.3382 [hep-th]].
- S. H. Katz, A. Klemm and C. Vafa, Nucl. Phys. B **497**, 173-195 (1997) doi:10.1016/S0550-3213(97)00282-4 [arXiv:hep-th/9609239 [hep-th]].
- B. R. Greene and M. R. Plesser, Nucl. Phys. B **338**, 15-37 (1990) doi:10.1016/0550-3213(90)90622-K

参考文献

- V. V. Batyrev, J. Alg. Geom. **3**, 493-545 (1994) [arXiv:alg-geom/9310003 [math.AG]].
- P. Berglund and T. Hubsch, Nucl. Phys. B **393**, 377-391 (1993) doi:10.1016/0550-3213(93)90250-S [arXiv:hep-th/9201014 [hep-th]].
- E. Clader and Y. Ruan, doi:10.1007/978-3-319-94220-9_1 [arXiv:1412.1268 [math.AG]].
- A. Strominger, S. T. Yau and E. Zaslow, Nucl. Phys. B **479**, 243-259 (1996) doi:10.1016/0550-3213(96)00434-8 [arXiv:hep-th/9606040 [hep-th]].
- M. Kontsevich and Y. Soibelman, [arXiv:math/0011041 [math.SG]].
- P. Seidel, [arXiv:math/0310414 [math.SG]].

- R. Schimmrigk, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 3049-3096 (1996) doi:10.1142/S0217751X96001486 [arXiv:hep-th/9405086 [hep-th]].
- Handbook for Mirror Symmetry of Calabi-Yau & Fano Manifolds,ISBN:9781571463890
- A. I. Efimov, Adv. Math. **230**, 2 (2012) [arXiv:0907.3903 [math.AG]].
- V. Golyshev, V. Lunts and D. Orlov, J. Alg. Geom. **10**, no.3, 433-496 (2001) [arXiv:math/9812003 [math.AG]].