中国科学技术大学

本科毕业论文

关于镜像对称性的理论和相关应用

作者姓名：	陈嘉莘
学　　号：	PB22000007
专　　业：	物理学
导　　师：	王昕　副研究员
完成时间：	2025 年 10 月 27 日

摘 要

摘要是论文内容的总结概括，应简要说明论文的研究目的、基本研究内容、研究方法或过程、结果和结论，突出论文的创新之处。摘要应具有独立性和自明性，即不用阅读全文，就能获得论文必要的信息。摘要中不宜使用公式、图表，不引用文献。

摘要分中文和英文两种，中文在前，英文在后，内容及段落须相互呼应。博士论文中文摘要一般 800～1000 个汉字，硕士论文中文摘要一般 600 个汉字。英文摘要的篇幅参照中文摘要。

论文的关键词，是为了文献标引工作从论文中选取出来用以表示全文主题内容信息的单词或术语。建议关键词数量不超过 8 个，每个关键词之间用分号间隔。

英文摘要部分的标题为“ABSTRACT”。每个关键词第一个字母大写，关键词之间用半角逗号加空一格间隔，英文关键词与中文关键词须相互呼应。

关键词：学位论文；摘要；关键词

ABSTRACT

The length of the English abstract should refer to that of the Chinese abstract. The title of the English abstract is “ABSTRACT”. The first letter of each keyword should be capitalized, and keywords should be separated by a halfwidth comma and a space. The English keywords and Chinese keywords should correspond to each other.

Key Words: Dissertation; Abstract; Keywords

目 录

插图和附表清单

第一章　镜像对称性的起源和物理叙述

对偶性 (Duality)，是现代物理学中无法绕开的一个重大课题。概括的来说，对偶性就是指两个不同的物理理论或同一理论的不同变种在某种条件下可以对具体问题给出两个角度的具有对应的物理意义的结果。一些典型的例子如 $\mathcal{N}=4$ 的超对称规范理论的 Montonen-Olive 对偶，$\mathcal{N}=1$ 超对称规范理论中的 Seiberg 对偶，弦理论中的 S 对偶、T 对偶等。对偶性之所以具有极为重要的地位，是由于人们若在其中一个角度无法解决问题或解法很复杂时，可以通过尝试对偶的理论的相对应的角度来进行分析，在很多情况下这些对偶的理论可以给出原本角度难以给出的结论。

镜像对称性是一种对偶性，准确的说镜像对称性是作为 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称场论的对偶性被提出的。为何人们将其命名为对称性？对称性和对偶性的关系是什么？对于不同理论经常可以在更高观点有统一的描述，不同的理论之间的对偶性可以转变为统一的描述的对称性。

这样的对偶性（或对称性）在数学上进行严格的叙述和证明是复杂的，但常常具有明确的物理意义，本章将从镜像对称性的物理起源及其物理叙述和“证明”出发讨论镜像对称性。

第一节　$\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称及实现模型

一、2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称的一般讨论

1. 从一个简单实现出发

对 $1+1$ 维时空中定义的量子场论，包含复标量场 ϕ 和 Dirac 场 $\psi_{\pm}$，及作用量

$$S=\frac{1}{2\pi}\int d^2x\{|\partial_0\phi|^2-|\partial_1\phi|^2+i\bar{\psi}_-(\partial_0+\partial_1)\psi_-+i\bar{\psi}_-(\partial_0-\partial_1)\psi_-\} \qquad (1.1)$$

，是一个简单的 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称场论的实现。从这个作用量我们可以得到超对称变换（在下述的超对称变换及生成元省略 Hermite 共轭后的相同形式表达式）

$$\delta\phi=\epsilon_+\psi_--\epsilon_-\psi_+ \qquad (1.2)$$

$$\delta\psi_{\pm} = \pm i\bar{\epsilon}_{\mp}(\partial_0 \pm \partial_1)\phi \tag{1.3}$$

同时得到超荷作为这些变换的生成元

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2\pi}\int(\partial_0 \pm \partial_1)\bar{\phi}\psi_{\pm}dx^1 \tag{1.4}$$

此时易知该理论有两个左手（定义为 $+$）实超荷和两个右手（定义为 $-$）实超荷。同时这个理论还有两个 $U(1)$ 的 R 对称性，分别称为矢量（vector）对称性和轴向（axial）对称性。

$$U(1)_V : \psi_{\pm} \to e^{-i\alpha}\psi_{\pm}, \bar{\psi}_{\pm} \to e^{i\alpha}\bar{\psi}_{\pm} \tag{1.5}$$

$$U(1)_A : \psi_{\pm} \to e^{\pm i\beta}\psi_{\pm}, \bar{\psi}_{\pm} \to e^{\mp i\beta}\bar{\psi}_{\pm} \tag{1.6}$$

同时得到这两个对称性的守恒荷

$$F_V = \frac{1}{2\pi}\int(\bar{\psi}_-\psi_- + \bar{\psi}_+\psi_+) \tag{1.7}$$

$$F_A = \frac{1}{2\pi}\int(-\bar{\psi}_-\psi_- + \bar{\psi}_+\psi_+) \tag{1.8}$$

2. 从超对称代数关系角度

我们定义 2d $\mathcal{N} = (2,2)$ 超对称代数：对有生成元 $\{Q_{\pm}, \bar{Q}_{\pm}, H, P, M\}$ 的代数（其中 $\{H, P, M\}$ 构成 Poincare 代数，在 $2d$ 时为简化而将 P^{μ} 拆成 P 和 H）的代数：

$$Q_{\pm}^2 = \bar{Q}_{\pm}^2 = 0 \tag{1.9}$$

$$\{Q_{\pm}, \bar{Q}_{\pm}\} = H \pm P \tag{1.10}$$

$$\{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = Z, \quad \{Q_+, Q_-\} = Z^* \tag{1.11}$$

$$\{Q_-, \bar{Q}_+\} = \tilde{Z}, \quad \{Q_+, \bar{Q}_-\} = \tilde{Z}^* \tag{1.12}$$

$$[iM, Q_{\pm}] = \mp Q_{\mp}, \quad [iM, \bar{Q}_{\pm}] = \mp\bar{Q}_{\pm} \tag{1.13}$$

其中 Z 和 $\tilde{Z}$ 是中心荷，在 2d 时

$$Q_{\pm}^{\dagger} = \bar{Q}_{\pm} \tag{1.14}$$

我们也可以加入理论的矢量和轴向 R 对称性的代数

$$[iF_V, Q_{\pm}] = -iQ_{\pm}, \quad [iF_V, \bar{Q}_{\pm}] = i\bar{Q}_{\pm} \tag{1.15}$$

$$[iF_A, Q_{\pm}] = \mp iQ_{\pm}, \quad [iF_A, \bar{Q}_{\pm}] = \pm i\bar{Q}_{\pm} \tag{1.16}$$

应当指出 F_V 和 F_V 并不是一般的守恒荷，应当取决于具体理论决定他们是否是守恒荷，但作为 R 对称性，费米子数目算符 $e^{i\pi F_V}$ 和 $e^{i\pi F_A}$ 是一般的守恒荷。

在引入了超对称代数之后，我们由此可以进行一窥对镜像对称性最初步的理解。

一个比较明显的推论是 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称代数的镜像自同构，即在进行如下的代数生成元交换时，代数关系不发生变化：

$$Q_- \longleftrightarrow \bar{Q}_- \tag{1.17}$$

$$F_V \longleftrightarrow F_A \tag{1.18}$$

$$Z \longleftrightarrow \tilde{Z} \tag{1.19}$$

根据上述的定义这容易检验。我们还有两种宇称变换（Parity Transformation）可以使得代数不变，即在只改变

$$P \rightarrow -P, \quad M \rightarrow -M \tag{1.20}$$

的意义下不改变其他代数关系，分别称为 A-宇称和 B-宇称。

A 宇称定义为

$$Q_- \leftrightarrow \bar{Q}_+, \quad \bar{Q}_- \leftrightarrow Q_+ \tag{1.21}$$

$$F_V \rightarrow -F_V, Z \leftrightarrow Z^* \tag{1.22}$$

B 宇称定义为

$$Q_- \leftrightarrow Q_+, \bar{Q}_- \leftrightarrow \bar{Q}_+ \tag{1.23}$$

$$F_A \rightarrow -F_A, \tilde{Z} \leftrightarrow \tilde{Z}^* \tag{1.24}$$

关于 A 宇称和 B 宇称的一个推论是二者在镜像自同构下互换，这个结论让我们可以在构造 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 理论的 Hilbert 空间的时候得到极大简化，我们注意到在 A 宇称下不变的生成元为

$$\{H, F_A, \tilde{Z}, Q_A := \bar{Q}_+ + Q_-, Q_A^\dagger\} \tag{1.25}$$

$$\{H, F_V, Z, Q_B := \bar{Q}_+ + \bar{Q}_-, Q_B^\dagger\} \tag{1.26}$$

我们从此在 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称中找到了代数关系整体的自同构性（即镜像自同构）和代数生成元在 A-宇称，B-宇称下不变的两个“区域”，而整体的镜像自同构交换这两个区域。

3. 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称的更多概念

我们之后将这两个区域以一种更一般的方式讨论，记我们讨论的超荷和 R-对称性守恒荷分别为 (Q,F)，可以取 (Q_A,F_A) 和 (Q_B,F_V)。并得到这个一般的方式的代数

$$Q,Q^{\dagger}=2H,\quad [F,Q]=Q \tag{1.27}$$

$$\{Q,Q\}=0 \tag{1.28}$$

注意到 $[F,Q]=Q$ 意味着 Q 将 F 的特征值 $+1$，这意味着我们以 $F=q$ 对 Hilbert 空间进行分解后有如下的 Q-链

$$\ldots\xrightarrow{Q}\mathcal{H}^{q-1}\xrightarrow{Q}\mathcal{H}^{q}\xrightarrow{Q}\mathcal{H}^{q+1}\xrightarrow{Q}\ldots \tag{1.29}$$

虽然由于 F 并非一个一般的对称性，使得上述的链无法一般的作为一个 Hilbert 空间的 $\mathbb{Z}$ 分次，但由于超对称性，Hilbert 空间仍有一般的 $\mathbb{Z}_2$ 分次。这个 Q-链让我们定义超对称态的 Hilbert 空间为 Q-链的上同调群

$$\mathcal{H}^{q}_{SUSY}=H^{q}(Q-chain):=\frac{Ker(Q)}{Im(Q)} \tag{1.30}$$

我们引入超对称讨论中常见的手征 (chiral) 概念在此时的表达：若算符 $\mathcal{O}$ 满足（其中的括号随算符的性质而决定为对易子或反对易子）

$$[Q_B,\mathcal{O}\}=0 \tag{1.31}$$

则称 chiral，若

$$[Q_A,\mathcal{O}\}=0 \tag{1.32}$$

则称为 twisted chiral。一个有关 chiral 算符的推论是 $[(H\pm P),\mathcal{O}]=\{Q_B,[Q_{\pm},\mathcal{O}\}]$，通过分别分析 $\mathcal{O}$ 是玻色型或费米型算符并展开可以得到这个结论。而对 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 同为 chiral 或 twisted chiral 算符，则 $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2$ 也为 chiral 或 twisted chiral 算符。因此我们发现所有 chiral 或 twisted chiral 算符构成环结构，常称为 chiral 或 twisted chiral 环。

4. 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 的超空间形式

为了一般性的讨论 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称，特别是一般性的构造 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称场论，我们需要引入 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称的超空间形式。我们构造有两个实数坐标和四个 Grassman 数坐标的超空间，在原来的 1+1d Minkowski 空间基础上，引入四个 Grassman 数坐标 $\{\theta^{+},\theta^{-},\bar{\theta}^{+},\bar{\theta}^{-}\}$，超空间由这四个坐标和原本

的 $\{x^0, x^1\}$ 构成。类似 $\mathcal{N}=1$ 的超对称，我们此时也可以定义超空间上的微分算符 (由于超荷等价于超空间上的微分算符，我们仍用 $\mathcal{Q}$ 作为微分算符，但采用花体)。

$$\mathcal{Q}_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm\partial_\pm, \quad \bar{\mathcal{Q}}_\pm = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm\partial_\pm \tag{1.33}$$

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} - i\bar{\theta}^\pm\partial_\pm, \quad \bar{D}_\pm = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} + i\theta^\pm\partial_\pm \tag{1.34}$$

此处 $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 + \partial_1)$，我们显然可以验证 $\{\mathcal{Q}_\pm, \bar{\mathcal{Q}}_\pm\} = -2i\partial_\pm$。和 $\mathcal{N}=1$ 类似，对超场的超对称变换为

$$\delta = \epsilon_+\mathcal{Q}_- - \epsilon_-\mathcal{Q}_+ - \bar{\epsilon}_+\bar{\mathcal{Q}}_- + \bar{\epsilon}_-\bar{\mathcal{Q}}_+ \tag{1.35}$$

同样的，我们可以对一般的超场（Superfield）进行限制，得到 chiral 和 twisted chiral 超场（注意此处并非上一节定义的 chiral 和 twisted chiral 算符）。

定义 chiral 超场 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足

$$\bar{D}_\pm\boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{1.36}$$

而 twisted chiral 超场 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 满足

$$\bar{D}_+\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = D_-\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = 0 \tag{1.37}$$

虽然此处定义的 chiral 和 twisted chiral 超场不同于上节定义的 chiral 和 twisted chiral 场（算符）。但可以注意到若我们展开 chiral 或 twisted chiral 超场的一般形式（以 chiral 超场为例，其中 $y^\pm = x^\pm - i\theta^\pm\bar{\theta}^\pm$）

$$\boldsymbol{\Phi}(x^\mu, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = \phi(y^\mu) + \theta^\alpha\psi_\alpha(y^\mu) + \theta^+\theta^-F(y^\mu) \tag{1.38}$$

我们可以将算符表达和超空间表达联系起来，通过类似的定义

$$\hat{\delta} = \epsilon_+Q_- - \epsilon_-Q_+ - \bar{\epsilon}_+\bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_-\bar{Q}_+ \tag{1.39}$$

由于 $y^\pm$ 的定义，并联系超空间的表达和算符的表达

$$\delta\mathcal{O} = i[\hat{\delta}, \mathcal{O}] \tag{1.40}$$

可以验证

$$[\bar{Q}_\pm, \phi] = [Q_B, \phi] = 0 \tag{1.41}$$

即 chiral 超场的标量场部分是 chiral 场，这说明这个定义是有意义的。我们再将矢量和轴向 R 对称性也搬到超场上来，我们超场的矢量 R 对称和轴向 R 对称为：

$$e^{i\alpha F_V}: \mathcal{F}(x^\mu, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) \to e^{i\alpha q_V}\mathcal{F}(x^\mu, e^{-i\alpha}\theta^\pm, e^{i\alpha}\bar{\theta}^\pm) \tag{1.42}$$

$$e^{i\beta F_A}:\mathcal{F}(x^\mu,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm)\to e^{i\beta q_A}\mathcal{F}(x^\mu,e^{\mp i\beta}\theta^\pm,e^{i\beta}\bar{\theta}^\pm) \tag{1.43}$$

利用 Jacobi 恒等式和 $\delta\mathcal{O}=i[\hat{\delta},\mathcal{O}]$ 定义，可验证这样的 R 对称性的定义满足前述代数 $[iF_V,Q_\pm]=-iQ_\pm,\quad [iF_V,\bar{Q}_\pm]=i\bar{Q}_\pm$ 等式。

为了构造场论的作用量，在超对称理论中，我们一般有 D-term,F-term 项，而此时多了一项类似 F-term 的 twisted F-term 项。一般的形式为

$$\int d^2xd^4\theta K(\mathcal{F}_i) \tag{1.44}$$

$$\int d^2xd^2\theta W(\boldsymbol{\Phi}_i) \tag{1.45}$$

$$\int d^2xd^2\tilde{\theta}\tilde{W}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i) \tag{1.46}$$

其中定义 $d^4\theta=d\theta^+d\theta^-d\bar{\theta}^-d\bar{\theta}^+$，$d^2\theta=d\theta^-d\theta^+$，$d^2\tilde{\theta}=d\bar{\theta}^-d\theta^+$。其中 K 为依赖超场 $\mathcal{F}$ 的光滑函数，$W(\boldsymbol{\Phi}_i)$ 和 $\tilde{W}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i)$ 为分别依赖 chiral 超场 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 和 twisted chiral 超场 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 的全纯函数。

我们现在来说明这样的定义是合理的，即说明这样定义的作用量确实具有超对称不变性，考虑 D-term 被作用的第一项为：

$$\int d^2xd^4\theta\epsilon_+(\mathcal{Q}_-\mathcal{F}_i)\frac{\partial K}{\partial\mathcal{F}_i}=\int d^2xd^4\theta\epsilon_-(\frac{\partial}{\partial\theta^-}+i\bar{\theta}^-\partial_-)K(\mathcal{F}_i) \tag{1.47}$$

对右式前一项，在 $d^4\theta$ 积分下消失，后一项对 d^2x 为全导数项，也消失。对 chiral 超场和 twisted chiral 超场有类似的论证，我们只演示对于 chiral 超场的论证，对 $\epsilon_\pm$ 项有

$$\pm\int d^2xd\theta^-d\theta^+\epsilon_\pm(\frac{\partial}{\partial\theta^\mp}+i\bar{\theta}^\mp\partial_\mp)W(\boldsymbol{\Phi}_i) \tag{1.48}$$

第一项在 $d^2\theta$ 下积分为 0，第二项对 d^2x 为全导数，对 $\bar{\epsilon}_\pm$ 项有

$$\mp\int d^2xd\theta^-d\theta^+\bar{\epsilon}_\pm(\bar{D}-2i\theta^\pm\partial_\pm)W(\boldsymbol{\Phi}_i) \tag{1.49}$$

显然为 0，其中用到了 $\bar{\mathcal{Q}}_\pm=\bar{D}_\pm-2i\theta^\pm\partial_\pm$。

二、非线性 Sigma 模型和 Landau-Ginzburg 模型

1. 非线性 Sigma 模型和 Landau-Ginzburg 模型的定义

对一个可以以

$$g_{i\bar{j}}=\partial_i\partial_{\bar{j}}K(\phi^i,\bar{\phi}^{\bar{i}}) \tag{1.50}$$

生成度规的函数 $K(\phi^i,\bar{\phi}^{\bar{i}})$，即一个 K$\ddot{a}$hler 势，我们常定义 D-term 为

$$\mathcal{L}=\int d^4\theta K(\phi^i,\bar{\phi}^{\bar{i}}) \tag{1.51}$$

考虑到

$$\Phi(x^\mu,\theta^\pm,\bar\theta^\pm)=\phi(y^\pm)+\theta\psi(y^\pm)+\theta^+\theta^-F(y^\pm) \tag{1.52}$$

因此一般的可以展开为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-g_{i\bar j}\partial^\mu\phi^i\partial_\mu\bar\phi^{\bar j}+ig_{i\bar j}\bar\psi_-^{\bar j}(D_0+D_1)\psi_-^i+ig_{i\bar j}\bar\psi_+^{\bar j}(D_0-D_1)\psi_+^i\\&+R_{i\bar jk\bar l}\psi_+^i\psi_-^k\bar\psi_-^{\bar j}\bar\psi_+^{\bar l}+g_{i\bar j}(F^i-\Gamma^i_{jk}\psi_+^j\psi_-^k)(\bar F^{\bar j}-\Gamma^{\bar j}_{\bar k\bar l}\bar\psi_-^{\bar k}\bar\psi_+^{\bar j})\end{aligned} \tag{1.53}$$

其中定义了协变导数 $D_\mu\psi_\pm^i=\partial_\mu\psi_\pm^i+\partial_\mu\phi^j\Gamma^i_{jk}\psi_\pm^k$，这样理论的确定等于 target space 的具体构造的确定，而 ϕ 此时作为 $\phi:\Sigma\to M$ 的映射而存在。

K$\ddot{a}$hler 势在一个“K$\ddot{a}$hler 变换”下不改变产生的度规，即在原 K$\ddot{a}$hler 势上只添加全纯或反全纯项而不进行其他改变:

$$K(\Phi^i,\bar\Phi^{\bar i})\to K(\Phi^i,\bar\Phi^{\bar i})+f(\Phi^i)+\bar f(\bar\Phi^{\bar i}) \tag{1.54}$$

在上述非线性 Sigma 模型中加入 F-term

$$\int d^2\theta W(\Phi^i)=F^i\partial_iW-\partial_i\partial_j\psi_+^i\psi_-^j \tag{1.55}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\int d^4\theta K(\Phi^i,\bar\Phi^{\bar i})+(\int d^2\theta W(\Phi^i)+c.c.)\\=&-g_{i\bar j}\partial^\mu\phi^i\partial_\mu\bar\phi^{\bar j}+ig_{i\bar j}\bar\psi_-^{\bar j}(D_0+D_1)\psi_-^i+ig_{i\bar j}\bar\psi_+^{\bar j}(D_0-D_1)\psi_+^i\\&+R_{i\bar jk\bar l}\psi_+^i\psi_-^k\bar\psi_-^{\bar j}\bar\psi_+^{\bar l}-g^{\bar ij}\partial_{\bar i}W\partial_jW-D_j\partial_jW\psi_+^i\psi_-^j-D_{\bar i}\partial_{\bar j}\bar\psi_-^{\bar i}\bar\psi_+^{\bar j}\end{aligned} \tag{1.56}$$

其中已经将辅助场 F 和 $\bar F$ 积分掉，在加入了 F-term 后，理论不只取决于 target space 的几何结构，也取决于加入的超势（Superpotential）W。

Landau-Ginzburg 理论的超对称变换为

$$\begin{aligned}\delta\phi^i&=\epsilon_+\psi_-^i-\epsilon_-\psi_+^i\\\delta\psi_+^i&=2i\bar\epsilon_-\partial_+\phi^i+\epsilon_+F^i\\\delta\psi_-^i&=-2i\bar\epsilon_+\partial_-\phi^i+\epsilon_-F^i\end{aligned} \tag{1.57}$$

超荷为

$$\begin{aligned}Q_\pm&=\int dx^1 2g_{i\bar j}\partial_\pm\bar\phi^{\bar j}\psi_\pm^i\mp\frac{i}{2}\bar\psi_\mp^{\bar i}\partial_{\bar i}\bar W\\\bar Q_\pm&=\int dx^1 2g_{\bar ij}\bar\psi_\pm^{\bar i}\partial_\pm\phi^j\pm\frac{i}{2}\psi_\mp^i\partial_iW\end{aligned} \tag{1.58}$$

2. 两个模型的 R 对称性及其反常

我们先检查经典层面下两个模型的 R 对称性

$$e^{i\alpha F_V}\ :\mathcal{F}(x^\mu,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm)\to e^{i\alpha q_V}\mathcal{F}(x^\mu,e^{-i\alpha}\theta^\pm,e^{i\alpha}\bar{\theta}^\pm)\tag{1.59}$$

$$e^{i\beta F_A}\ :\mathcal{F}(x^\mu,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm)\to e^{i\beta q_A}\mathcal{F}(x^\mu,e^{\mp i\beta}\theta^\pm,e^{i\beta}\bar{\theta}^\pm)\tag{1.60}$$

一般来说我们可以让 $\boldsymbol{\Phi}^i$ 的 R 荷平凡使得 D-term 不在 R 对称性下发生改变（特别的如果我们取 $K(\boldsymbol{\Phi}^i,\bar{\boldsymbol{\Phi}}^i)=f(|\boldsymbol{\Phi}^i|^2)$，则此时一般的 $\boldsymbol{\Phi}^i$ 取法均不会改变），且 $d^4\theta$ 在 R 对称性下不变，因此非线性 Sigma 模型在经典 R 对称性下不变。对 Landau-Ginzburg 模型中的 F-term，其中的 $d^2\theta$ 在轴向 R 对称性下不变，但在矢量 R 对称性下获得 $e^{-2i\alpha}$，因此 Landau-Ginzburg 模型仅在一个可以保持 K$\ddot{a}$hler 度规不变但使得超势获得 $e^{2i\alpha}$ 的变换下不变。

对于两个理论的 R 对称性量子反常的分析，我们可以先考虑一个简单的模型，并从中提取量子反常可能发生的条件。

我们考虑一个定义在 $\Sigma=T^2$ 上的具有费米子的模型

$$S=\int_{T^2}d^2z(i\bar{\psi}_+D_z\psi_++i\bar{\psi}_-D_{\bar{z}}\psi_-)\tag{1.61}$$

其中（A 为复向量丛 E 的一个联络的局部形式）

$$D_z=\partial_z+A_z,D_{\bar{z}}=\partial_{\bar{z}}+A_{\bar{z}}\tag{1.62}$$

而 R 对称性为

$$V\ :\psi^i_\pm\to e^{-i\alpha}\psi^i_\pm\tag{1.63}$$

$$A\ :\psi^i_\pm\to e^{\mp i\beta}\psi^i_\pm\tag{1.64}$$

我们应当找到一个可以让我们去应用 R 对称性检查是否有量子反常的耦合函数，而我们可以用指标定理找到这样的耦合函数，由于

$$dim(Ker(D_{\bar{z}}))-dim(Ker(D_z))=\int_{T^2}c_1(E)\ :=k\tag{1.65}$$

从而耦合函数

$$\langle\psi_-(z_1)\cdots\psi_-(z_k)\bar{\psi}_+(w_1)\cdots\bar{\psi}_+(w_k)\rangle\tag{1.66}$$

非 0，这是由于上述耦合函数有 k 个 $D_{\bar{z}}$ 的 0 模式（即场 ψ_-）但无 D_z 的零模式。我们检查这个耦合函数发现矢量 R 对称性无反常而轴向 R 对称性有反常。一般来说，$U(1)_A$ 对称性在量子化后破缺为 $\mathbb{Z}_{2k}$ 对称性 $\{e^{2\pi il/2k}\}$。

对于我们具有类似的定义的非线性 Sigma 模型

$$-2ig_{i\bar{j}}\bar{\psi}_{-}^{\bar{j}}D_{\bar{z}}\psi_{-}^{i}+2ig_{i\bar{j}}\bar{\psi}_{+}^{\bar{j}}D_{z}\psi_{+}^{i} \tag{1.67}$$

也应当具有这样的轴向 R 对称性反常而矢量 R 对称性不变。上述的分析让我们猜测消除轴向 R 对称性反常的条件为

$$c_1(M)=0 \tag{1.68}$$

考虑到非线性 Sigma 模型的 target space 已经是一个 K*ä*hler 空间，在满足上述条件要求时变为 Calabi-Yau 空间。而对于 Landau-Ginzburg 模型，由于也有类似的费米子动能部分，因此在满足 Calabi-Yau 空间条件时会保持经典时存在的轴向 R 对称性。而考虑到超势的 Non-Renormalization 定理，我们对矢量 R 对称性的分析在量子化后仍然成立。

概括来说，一个 target space 是 Calabi-Yau 的非线性 Sigma 模型和一个 target space 是 Calabi-Yau、且在矢量 R 对称性变换下获得 $e^{2i\alpha}$（文献中常称作 quasi-homogeneous）的超势的 Landau-Ginzburg 模型是无反常的。

人们也经常在理论中加入 B 场项，取一个在上同调群 $H^2(M,\mathbb{R})$ 中非平凡的 B 场来作为一个相位项

$$exp(i\int\phi^*B) \tag{1.69}$$

这在 ϕ 的连续形变下不变，即在超对称变换下不变。其中一个引入 B 场的好处是我们可以用 B 场的变化来表达理论的量子反常：

$$[B]\to[B]-2\beta c_1(M) \tag{1.70}$$

三、线性 Sigma 模型

我们现在来看 1+1 维时空上实现 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称的另一种理论，即线性 Sigma 模型。线性 Sigma 模型作为 Sigma 模型，标量场同样作为 target space 的坐标而出现。一个简单的线性 Sigma 模型的例子是

$$L=-\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi^{i}\partial_{\mu}\phi_{i}-\frac{e^2}{2}[(\phi^i)^2-r]^2 \tag{1.71}$$

线性 Sigma 模型相比于之前的非线性 Sigma 模型的最大的好处是可以在一定程度上对理论进行非微扰描述，这是由于线性 Sigma 模型常常可以整体的刻画真空的模空间（moduli）。唯独需要解决的一个小问题是，$\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称需要 target space 为 K*ä*hler 流形，但线性 Sigma 模型在偶数维空间的真空模空间为奇数维（即减去 1）空间，我们随后可以发现这可以通过加入 $U(1)$ 规范场解决。

1. $\mathcal{N}=(2,2)$ 的 $U(1)$ 规范理论

我们按照超对称规范理论一般的作用量构造方式进行构造

$$L_{kin}=\int d^4\theta\bar{\Phi}e^V\Phi \tag{1.72}$$

其中规范变换为

$$\Phi\to e^{iA}\Phi \quad V\to V+i(\bar{A}-A) \tag{1.73}$$

我们选取 $\mathcal{N}=(2,2)$ 的 Wess-Zumino 规范

$$\begin{aligned}V=&\theta^-\bar{\theta}^-(v_0-v_1)+\theta^+\bar{\theta}^+(v_0+v_1)-\theta^-\bar{\theta}^+\sigma-\theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma}+i\theta^-\theta^+(\bar{\theta}^-\bar{\lambda}_-+\bar{\theta}^+\bar{\lambda}_+)\\&+i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^-\lambda_-+\theta^+\lambda_+)+\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D\end{aligned} \tag{1.74}$$

并定义超场（其中 $v_01=\partial_0v_1-\partial_1v_0$ 为 1+1 维的场强）

$$\Sigma:=\bar{D}_+D\_V=\sigma+i\theta^+\bar{\lambda}_+-i\bar{\theta}^-\lambda_-+\theta^+\bar{\theta}^-(D-iv_{01}) \tag{1.75}$$

我们以

$$L=\int d^4\theta(\bar{\Phi}e^V\Phi-\frac{1}{2e^2}\bar{\Sigma}\Sigma)+Re(-t\int d^2\tilde{\theta}\Sigma) \tag{1.76}$$

这样的方式构造 Lagrange 量，其中 t 为一个复参数，一般表达为 $t=r-i\theta$，r 称为 Fayet-Illiopoulos 参数，θ 为 1+1 维的 θ 角。在代入 Wess-Zumino 规范下的向量场和手征场的表达式后，Lagrange 有标量势项

$$U=|\sigma|^2|\phi|^2+\frac{e^2}{2}(|\phi|^2-r)^2 \tag{1.77}$$

若将上述 Lagrange 推广至 N 个手征场（每个对应 Q_i 的规范荷），并加入关于这些手征场的 F-term，即得到最一般的标量势

$$U(\phi_i,\sigma)=\sum_{i=1}^N|Q_i\sigma|^2|\phi_i|^2+\frac{e^2}{2}(\sum_{i=1}^N Q_i|\phi_i|^2-r)^2+\sum_{i=1}^N|\frac{\partial W}{\partial\phi_i}|^2 \tag{1.78}$$

2. $\mathcal{N}=(2,2)$ 的 $U(1)$ 规范理论的重整化与反常

我们考虑一个这个理论的简单情况，即只有一个规范荷为 1 的手征超场 Φ，并在较高的能标 μ 考虑这个理论。按照 Wilson 的思想，此时的有效场论是我们将 $\mu\leqslant|k|\leqslant\Lambda_{UV}$ 得到的，对于 Lagrange 量中的

$$\frac{1}{2e^2}D^2+D(|\phi|^2-r(\Lambda_{UV})) \tag{1.79}$$

项，我们将有动力学的 ϕ 场积分得到

$$\langle|\phi|^2\rangle=\int\limits_{\mu\leqslant|k|\leqslant\Lambda_{UV}}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{2\pi}{k^2}=\ln(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}) \tag{1.80}$$

这要求

$$r(\Lambda_{UV}) = r + \ln(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}) \tag{1.81}$$

来使得作用量有限，因此对一个确定了 Λ_{UV} 和 r_0 的理论，

$$r(\mu) = \ln(\frac{\mu}{\Lambda}) \tag{1.82}$$

这样在确定了一个理论之后，我们可以用 Λ 来表达 FI 参数的重整化流行为，无量纲的参数此时用有量纲量来描述，这在一般的 Yang-Mills 的量子化中也有出现，称之为质量衍变（dimensional transmutation）。

轴向 R 对称性的反常也与 FI 参数的重整化有关，对有 N 个手征超场的理论，FI 参数线性的组合为

$$r(\mu) = \sum_{i=1}^{N} Q_i \ln(\frac{\mu}{\Lambda}) \tag{1.83}$$

而轴向 R 对称性使得量子化后的 θ 角出现平移

$$\theta \longrightarrow \theta - 2\sum_{i=1}^{N} Q_i \alpha \tag{1.84}$$

，这说明如果 $\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0$ 时，FI 参数在能标变化下不发生改变，同时无量子反常，而如果 $\sum_{i=1}^{N} Q_i \neq 0$ 时，出现质量衍变以及轴向 R 对称性的破缺

$$U(1)_R \rightarrow \mathbb{Z}_{2\sum_{i=1}^{N} Q_i} \tag{1.85}$$

3. 与非线性 Sigma 模型的关系

另一个关于线性 Sigma 模型的有价值的点是，Sigma 模型可以在一些条件下得到非线性 Sigma 模型。

我们先考虑 N 个规范荷为 1 的手征超场，并不加入 F-term 的超势，此时的标量势前已指出为

$$U = \sum_{i=1}^{N} |\sigma|^2|\phi_i|^2 + \frac{e^2}{2}(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 - r)^2 \tag{1.86}$$

经典真空为

$$\sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 = r \quad \sigma = 0 \tag{1.87}$$

若 $r = 0$，我们得到 $\phi_i = 0$，σ 无约束的平凡解，若 $r > 0$，此时真空的模空间可以确定为

$$\left\{(\phi_1, \cdots, \phi_N) | \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 = r\right\}/U(1) = \mathbb{CP}^{N-1} \tag{1.88}$$

由于 Higgs 机制，“平行于”真空构型的 Higgs 粒子此时获得 $e\sqrt{2r}$ 的质量，规范场也获得 $e\sqrt{2r}$ 的质量，同时满足

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{\phi}_i\psi_{i\pm}=0\quad\sum_{i=1}^{N}\bar{\psi}_{i\pm}\phi_i=0\tag{1.89}$$

的费米子也获得 $e\sqrt{2r}$ 的质量，若我们将 $(\psi_{i\pm},\bar{\psi}_{i\pm})$ 视作向量，考虑到 ϕ_i 的几何意义，此时该向量切 $\sum_{i=1}^{N}|\phi_i|^2=r$ 空间。这样使得整个 chiral multiplet 获得质量的 Higgs 有时也称超 Higgs 机制。为了使得线性 Sigma 理论回到非线性 Sigma 理论，我们调整刚刚获得的质量到 $e\to\infty$ 极限，此时所有获得质量的场的动力学可以忽略，包括 vector multiplet 的所有成分。其中 D 和 $\lambda_\pm$ 的运动方程给出经典真空解和对费米子的约束式，而 v_μ 和 σ 给出

$$v_\mu=\frac{i}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{\phi}_i\partial_\mu\phi_i-\partial_\mu\bar{\phi}_i\phi_i)}{\sum_{i=1}^{N}|\phi_i|^2}\tag{1.90}$$

$$\sigma=-\frac{\sum_{i=1}^{N}\bar{\psi}_{i+}\psi_{i-}}{\sum_{i=1}^{N}|\phi_i|^2}\tag{1.91}$$

将 D 和 σ 作为辅助场代入原作用量即得到在 $\mathbb{CP}^1$ 上的非线性 Sigma 模型，ϕ_i 的动能项正比于 $\mathbb{CP}^1$ 的 Fubini-Study 度规

$$ds^2=rg^{FS}\tag{1.92}$$

而 v_μ 可视作 $\mathbb{CP}^1$ 上的规范场 A 的拉回 ϕ^*A，这使得 theta 项，即 B 场，也正比于 Fubini-Study 度规

$$B=\frac{\theta}{2\pi}\omega^{FS}\tag{1.93}$$

同时 σ 的代入也使原 Lagrange 出现非线性 Sigma 模型特有的四费米子项，伴随着 $\mathbb{CP}^1$ 的曲率。一个关于 Fubini-Study 度规最重要的性质是这是一种 Einstein 度规，即 Ricci 张量正比于度规本身，对于 Fubini-Study 度规来说：

$$R_{i\bar{j}}=Ng_{i\bar{j}}\tag{1.94}$$

同时考虑到上述分析指出经典线性 Sigma 模型破缺对称性得到非线性 Sigma 模型，而对于线性 Sigma 模型度规的重整化可以得到度规随能标的行为

$$g_{i\bar{j}}=g'_{i\bar{j}}+\frac{N}{2\pi}\ln(\frac{\mu}{\mu'})g^{FS}_{i\bar{j}}\tag{1.95}$$

这说明无论如何改变能标，target space 度规只会改变其系数，而始终正比于 Fubini-Study 度规，即此时的线性 Sigma 模型重整化流至少在一圈时符合非线性 Sigma 模型，即 target space Ricci 流。同时，若我们记此时由动能项导出的度规

对应的Kähler形式为ω，由于上述对度规的分析，这个Kähler形式和Fubini-Study形式也有正比关系 $\omega = \frac{r}{2\pi}\omega^{FS}$，考虑到复参数 $t = r - i\theta$ 的定义，有

$$[\omega] - i[B] = \frac{t}{2\pi}[\omega^{FS}] \tag{1.96}$$

这说明 t 其实是复化 Kähler 类的参数，由于此前引入的 Σ 场是一个 twisted chiral 超场，这说明复化 Kähler 类与一个 twisted chiral 参数相关联。由于 r 的大小和 θ 的变换均在 $\sum_i = 1^N Q_i \neq 0$ 时收到影响，所以仅有在 $\sum_i = 1^N Q_i \neq 0$ 时才可以保证 t 即便在量子化后也可以刻画复化 Kähler 类。

四、线性 Sigma 模型与 Toric 几何

我们下面通过选取不同数量的手征超场，以及调整他们的规范荷，来说明手征超场的数目即 Toric 簇的锥（cone）构造中的一维扇（fan）数目，手征超场携带的规范荷即锥构造中为每个一维扇赋予的荷，并由此联系线性 Sigma 模型与 Toric 簇的几何。

1. Resolved Conifold

考虑一个有四个手征超场的 $U(1)$ 规范理论，对应的规范荷为 $1, 1, -1, -1$，显然此时

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \tag{1.97}$$

因此 FI 参数不会受重整化影响，同时轴向 R 对称性无量子反常，即复参数 t 可以作为理论一般的 twisted chiral 参数。这个理论的标量势为

$$U = \sum_{i=1}^{N} |\sigma|^2|\phi_i|^2 + \frac{e^2}{2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 - |\phi_4|^2 - r)^2 \tag{1.98}$$

我们需要分别考虑这个理论在 $r >> 0$，$r = 0$，和 $r << 0$ 的行为。特别是真空模空间

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 - |\phi_4|^2 = r \tag{1.99}$$

在 $r >> 0$ 时，真空是由 ϕ_1, ϕ_2 作为底空间 $\mathbb{CP}^1$ 的坐标，ϕ_3, ϕ_4 作为纤维 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ 的坐标的纤维丛。整个纤维丛作为流形是一个非紧致的 Calabi-Yau，同时 t 作为 Calabi-Yau 的复化 Kähler 参数。

在 $r << 0$ 时，此时和 $r >> 0$ 时一致，但 ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3, ϕ_4 互换。

在 $r = 0$ 时，此时允许一个 $\phi_i = 0$ 的场构型，一般的对应于一个收缩到 0 的并形成一个奇点的底空间，同时 Higgs branch 在这个奇点处连接到 Coulomb branch。记此时的规范不变的坐标为

$$x = \phi_1\phi_3 \quad y = \phi_1\phi_4 \quad z = \phi_2\phi_3 \quad w = \phi_2\phi_4 \tag{1.100}$$

则 $r = 0$ 的真空流形可以被描述为

$$xw = yz \tag{1.101}$$

这个也称为 conifold 奇点（conifold singularity）

2. $\mathbb{C}^N/\mathbb{Z}_d$ Orbifold

考虑一个有 $N+1$ 个手征超场的 $U(1)$ 规范理论，这些超场记作 $\Phi_1, \cdots, \Phi_N, P$，分别有荷 $1, \cdots, 1, -d$，理论的标量势为

$$U = |\sigma|^2 \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 + |\sigma|^2 d^2 |p|^2 + \frac{e^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 - d|p|^2 - r\right)^2 \tag{1.102}$$

对于经典的真空模空间，我们同样也是对 FI 参数在 $r > 0$，$r = 0$，$r < 0$ 分别进行分析。

在 $r > 0$ 时，此时必须存在一些 $\phi_i \neq 0$，这使得 $\sigma = 0$，而一些 $\phi_i \neq 0$ 破坏了 $U(1)$ 规范对称性，并且因为超 Higgs 机制给 gauge multiplet 了质量。此时 $(\phi_1, \cdots, \phi_N)$ 为底空间 $\mathbb{CP}^1$ 的坐标，而 p 为纤维 $\mathcal{O}(-d)$ 的坐标，底空间的体积为 r。

在 $r = 0$ 时，此时可以允许 $\phi_i = p = 0$ 的保持规范对称性的解。对于 σ 作为坐标的方向是此时的 Coulomb branch，对于此时的 Higgs branch 是体积为 0 的 $\mathcal{O}(-d)$，这两个 branch 在原点处相交。

在 $r < 0$ 时，此时需要 $p \neq 0$，这破缺 $U(1)$ 规范对称性到 $\mathbb{Z}_d$，并且赋予 gauge multiplet 质量，同时 $\sigma = 0$。在 $\phi_i = 0$ 处，真空模空间有 $\mathbb{Z}_d$ 的奇点，在 $r \to -\infty$ 处完全可以用 $\mathbb{C}^N/\mathbb{Z}_d$ 的平坦度规描述。

由于此时不一定有 $d = N$ 使得 FI 参数不跑动，同时此时 FI 参数的重整化跑动行为为

$$r(\mu) = r(\mu') + (N - d)\ln(\frac{\mu}{\mu'}) \tag{1.103}$$

这说明在量子化后我们需要对 $d < N$，$d = N$，$d > N$ 分别进行分析

在 $d < N$ 时，在 $\mu \to \infty$ 下 $r > 0$，即回到上述分析的 target space 为 $\mathcal{O}(-d)$ 作为纤维，$\mathbb{CP}^{N-1}$ 作为底空间的纤维丛的非线性 Sigma 模型。

在 $d = N$ 时，r 不随能标变化跑动，t 作为理论一般的复化 Kähler 参数存在，

一个特别的情况是 $r(\mu')=0$，此时 Coulomb branch 和 Higgs branch 始终在奇点相交。

在 $d>N$ 时，理论比较复杂，由于 $r\to-\infty$ 的极限，此时的理论可以是对 $\mathbb{C}^N/\mathbb{Z}_d$ 的微扰。

3. 一般的分析

一个关于 Toric 簇的初步概述可以参考附录 A，我们现在一般性的分析引入手征超场的线性 Sigma 模型并发现其和 Toric 簇的一般联系。

对一个有手征超场 $\boldsymbol{\Phi}_1,\cdots,\boldsymbol{\Phi}_N$，规范荷 $Q_1,\cdots,Q_N$ 的理论。若所有的荷为正值，由 FI 参数的重整化行为，在能标足够大的时候 r 为正而且较大。回顾之前分析的超 Higgs 机制，在 $r>0$ 时，取一个真空构型的时候，规范场获得 $e\sqrt{2r}$ 质量，在当时我们取 $e\to\infty$ 极限使得这些获得质量的场动力学可以不考虑，而这与此时我们调整能标使得 $r\to\infty$ 是一致的。此时的理论回到一个加权射影空间（weighted projective space）作为 target space 的非线性 Sigma 模型，这个加权射影空间的权是由选取的规范荷标记的

$$X=\mathbb{P}^{N-1}_{[Q_1,\cdots,Q_N]} \tag{1.104}$$

现在考虑一般的 Q_i 选取，不妨设 $Q_1,\cdots,Q_l$ 是正的而 $Q_{l+1},\cdots,Q_N$ 是负的，此时的真空模空间为

$$\left\{(\phi_1,\cdots,\phi_N)|\sum_{i=1}^{l}Q_i|\phi_i|^2=r+\sum_{i=l+1}^{N}Q_i|\phi_i|^2\right\}/U(1) \tag{1.105}$$

作为一个高维的双曲面，即便在除去规范群之后，这个真空模空间也不是紧致的。这可以作为一个向量丛表达

$$X=\left[\oplus_{j=l+1}^{N}\mathcal{L}_j^{Q}\longrightarrow\mathbb{P}^{l-1}_{Q_1,\cdots,Q_l}\right] \tag{1.106}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是一个度数（degree）为 1 的线丛，在上文中我们也记这个线丛为 $\mathcal{O}(-1)$。

4. 超势与超曲面

我们此时考虑的模型还未加入可能存在的 D-term，如果有 D-term 的话，一个简单的方法是对于 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 的多项式。而我们会倾向于取齐次多项式

$$G(\boldsymbol{\Phi}_1,\cdots,\boldsymbol{\Phi}_N)=\sum_{i_1,\cdots,i_d}a_{i_1\cdots i_d}\boldsymbol{\Phi}_{i_1}\cdots\boldsymbol{\Phi}_{i_d} \tag{1.107}$$

这是由于若我们记整个 $\mathbb{CP}^{N-1}$ 的 Chern class 为 $c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$ 时，超曲面 M 的 Chern class 则是

$$c_1(M) = (N-d)[H]|_M \tag{1.108}$$

而这对一般的多项式则比较难以判断。下面我们再回到上文所述的"$\mathbb{C}^N/\mathbb{Z}_d$orbifold" 模型，但引入超势

$$W = PG(\Phi_1, \cdots, \Phi_N) \tag{1.109}$$

此时的标量势变为

$$\begin{aligned} U = |\sigma|^2 \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 + |\sigma|^2 d^2 |p|^2 + \frac{e^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 - d|p|^2 - r\right)^2 \\ + |G(\phi_1, \cdots, \phi_N)|^2 + \sum_{i=1}^{N} |p|^2 |\partial_i G|^2 \end{aligned} \tag{1.110}$$

在 $r > 0$ 时，有 $\sigma = p = G = \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 - r = 0$，此时的真空模空间就是我们选取的超曲面。在让 $e \to \infty$ 和 $a_{i_1 \cdots i_d} \to \infty$ 时，此时理论变为这个超曲面上的非线性 Sigma 模型。

在 $r < 0$ 时，$\sigma = \phi_i = 0$，$|p|^2 = |r|/d$。因此任意一个对真空构型的选取都会使得规范对称性从 $U(1)$ 破缺到 $\mathbb{Z}_d$，并使得 P 场在超 Higgs 机制下获得 $e\langle p\rangle$ 质量，而只要 $d > 2$，Φ_i 均不会获得质量。在 $e \to \infty$ 时，这回到一个有

$$W = \langle p\rangle G(\Phi_1, \cdots, \Phi_N) \tag{1.111}$$

的 Landau-Ginzburg 理论。由于此时还有剩余的 $\mathbb{Z}_d$ 对称性，此时也称为一个 Landau-Ginzburg Orbifold 理论。

在 $r = 0$ 时，$p = \phi_i = 0$，此时理论比较平凡，真空模空间就是 σ 张成的空间。

我们也可以对这个理论的重整化行为进行分析，但 FI 参数的跑动并不受到超势影响，仍然保持

$$r(\mu) = r(\mu') + (N-d)\ln(\frac{\mu}{\mu'}) \tag{1.112}$$

这在上文已经分析过，但由于 $c_1 = (N-d)[H]|_M$，即在取 $e \to \infty$ 时非线性 Sigma 模型的 target space 是一个 Calabi-Yau 模型。这使得 $d = N$ 时不仅 r 不跑动，t 也因为超曲面是 Calabi-Yau 而不跑动，这进一步加强了之前对于 $d = N$ 的分析。

五、线性 Sigma 模型的低能动力学

在上文中，我们分析的都是 $\mu < e\sqrt{r}$ 但 $\mu >> \Lambda_{NLSM}$ 的能标，若我们考虑 $\mu \sim \Lambda_{NLSM}$，则也会有一些新的变化值得考虑。

1. 从较大 σ 出发

我们从考虑超场 Σ 的最低阶 σ 来进行分析，作用量中的 σ 的出现类似于其他场的质量项

$$-|\sigma|^2|\phi|^2 - \bar{\psi}_-\sigma\psi_+ - \bar{\psi}_+\bar{\sigma}\psi_- \tag{1.113}$$

一个较大的 σ 意味着此时的能标让这些场可以看作比较重的动力学自由度，即我们可以在某种程度上忽略掉物质超场 Φ 而只考虑 Σ，此时的标量势的一部分为

$$U = \frac{e^2}{2}r^2 \tag{1.114}$$

若考虑到规范场的 θ 项，则也有贡献

$$U = \frac{e^2}{2}\hat{\theta}^2 \tag{1.115}$$

其中 $\hat{\theta}^2 := min_{n\in\mathbb{Z}}\{(\theta - 2\pi n)^2\}$，因此总的标量势能

$$U = \frac{e^2}{2}(r^2 + \hat{\theta}^2) = \frac{e^2}{2}|\hat{t}|^2 \tag{1.116}$$

2. Σ 的有效作用量

从只有一个规范荷为 1 的手征超场 Φ 的 $U(1)$ 规范理论出发，并不加入 F term。对 $\sigma >> \mu$ 的时候我们可以积分掉 $\mu \leqslant |k| \leqslant \Lambda_{UV}$ 的自由度，得到

$$S_{eff}(\Sigma) = \int d^4\theta(-K_{eff}(\Sigma, \bar{\Sigma})) + \frac{1}{2}\left(\int d^2\tilde{\theta}\tilde{W}_{eff}(\Sigma) + c.c\right) \tag{1.117}$$

具体的操作比较复杂，而主要的思路是先积分掉物质场 Φ

$$e^{iS^{(1)}_{eff}(\Sigma)} = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Sigma,\Phi)} \tag{1.118}$$

再积分掉 Σ 的一部分，而计算证明对有效的超势能，只有前者有实际贡献，这些贡献在一圈的情况下为

$$\partial_\sigma \tilde{W}^{(1)}_{eff} = \ln(\frac{\Lambda_{UV}}{\sigma}) - t(\Lambda_{UV}) = \ln(\frac{\mu}{\sigma}) - t(\mu) \tag{1.119}$$

$$\partial_\sigma\partial_{\bar{\sigma}} K^{(1)}_{eff} = \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4|\sigma|^2} \tag{1.120}$$

对 $\Lambda = \mu e^{-t(\mu)} = \Lambda e^{i\theta}$，则

$$\tilde{W}_{eff}(\Sigma) = -\Sigma(\ln(\frac{\Sigma}{\Lambda}) - 1) \tag{1.121}$$

这可以容易的推广到一般的情况，对规范群为 $U(1)^k = \prod_{a=1}^{k} U(1)_a$，以及有 Q_i^a 的手征物质超场 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 时，

$$\tilde{W}_{eff}(\Sigma_1, \cdots, \Sigma_k) = -\sum_{a=1}^{k} \Sigma_a \left[\sum_{i=1}^{N} Q_i^a \left(\ln\left(\frac{\sum_{b=1}^{k} Q_i^b \Sigma_b}{\mu} \right) - 1 \right) + t^a(\mu) \right] \tag{1.122}$$

六、非线性 Sigma 模型和 Landau-Ginzburg 模型的对应

1. 线性 Sigma 模型的“相”

继续考虑 M 个规范荷相加为 0 的手征超场，已经说明在此时 $U(1)_A$ 是理论的对称性，同时 FI 参数 r 也不随能标变化。由于 FI 参数的不变性，我们可以初始的选取希望的任意 FI 参数值，而前文已经说明在 $r >> 0$ 和 $r << 0$ 的理论是截然不同的，$r = 0$ 由于 σ 不受约束因此真空模空间“长出了”新的 σ 的区域，我们可以认为是将理论的两个区域被 $r = 0$ 的奇点分为两侧。

当我们考虑加入 θ 角，即将 $t = r - i\theta$ 作为理论的基本参数时，θ 此时的贡献为标量势的

$$U = \frac{e_{eff}^2}{2}(r_{eff}^2 + \hat{\theta}_{eff}^2) = \frac{e_{eff}^2}{2}|\hat{t}_{eff}^2| \tag{1.123}$$

而

$$t_{eff} = -\partial_\sigma \tilde{W}_{eff}(\sigma) = t + \sum_{i=1}^{M} Q_i \ln Q_i \tag{1.124}$$

这说明仅有在

$$r = -\sum_{i=1}^{M} Q_i \ln Q_i$$
$$\theta = 0 mod(2\pi) \tag{1.125}$$

使得标量势消失。回顾我们一开始引入的 θ，这使得 $r = 0$ 的奇点这时候变成一个圆柱（cylinder），而此时的说明仅在一点的时候会出现在之前 $r = 0$ 的时候的新区域，只要我们绕过这一点，$r >> 0$ 的理论和 $r << 0$ 的理论可以光滑的连接起来。

2. 两个模型的对应

考虑有 $U(1)$ 规范群和手征超场 $\Phi_1,\cdots,\Phi_N,P$ 以及规范荷 $1,\cdots,1,-N$ 的规范理论。取加上超势的作用量，即

$$L=\int d^4\theta\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{\Phi}_i e^V\Phi+\bar{P}e^{-NV}P-\frac{1}{2e^2}\bar{\Sigma}\Sigma\right)+\frac{1}{2}\left(\int d^2\tilde{\theta}(-t\Sigma)+c.c\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int d^2\theta PG(\Phi_1,\cdots,\Phi_N)+c.c\right) \quad (1.126)$$

我们已经说明 $r>>0$ 时这是一个在 $\mathbb{CP}^{N-1}$ 中由 $G=0$ 所定义的 Calabi-Yau 超曲面上的非线性 Sigma 模型，而 $r<<0$ 则是有超势 $W=\langle p\rangle G(\Phi_1,\cdots,\Phi_N)$ 和 $\mathbb{Z}_N$ orbifold 的 Landau-Ginzburg 模型。而上面分析说明这个相变点可以在圆柱上选取一条路径绕过去，这说明 Calabi-Yau 的 Sigma 模型和 Landau-Ginzburg Orbifold 模型是是紧密连接的，只是同一个模型在不同情况下的描述。

第二节　手征环与拓扑场论

手征环（chiral ring）是 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称场论的一个重要的性质，对于手征环的分析让我们可以定义 Topological twist，进而进一步定义拓扑场论。

一、手征环

我们按照之前提到过的记法，记 Q 为

$$Q_A=\bar{Q}_++Q_-$$
$$Q_B=\bar{Q}_++\bar{Q}_- \quad (1.127)$$

之一，并假设中心荷 $Z=\tilde{Z}=0$，显然 Q 也是 nilpotent 的

$$Q^2=0 \quad (1.128)$$

我们由此可以定义以 Q 为边缘算子的上同调类。回顾我们之前对 chiral 和 twisted chiral 算符的定义

$$[Q,\mathcal{O}\}=0 \quad (1.129)$$

由此我们有两个值得提到的结论，首先

$$[(H\pm P),\mathcal{O}]=\{Q_B,[Q_\pm,\mathcal{O}\}] \quad (1.130)$$

这意味着世界面上的平移或能动量算符均不改变对应算符的 Q 上同调类，意味着这样的类是良定的。同时对 chiral 或 twisted chiral 算符 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$

$$[Q, \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2] = 0 \tag{1.131}$$

即这样的 Q 上同调类也可以定义乘法，从而获得了环结构。

我们可以对这个环进行细致考察，假设 $\{\phi_i\}_{i=0}^{M}$ 是 Q 上同调群的基，定义乘法为

$$\phi_i\phi_j = C_{ij}^{k}\phi_k + [Q, \Lambda] \tag{1.132}$$

考虑到 ϕ_i 可能为费米或玻色型算符，对 C_{ij}^k 的对称性为

$$C_{|i||j|}^{k} = (-1)^{|i||j|}C_{ji}^{k} \tag{1.133}$$

我们约定 $\phi_0 = 1$，并考虑到算符的乘法是结合的，有两个性质分别为

$$C_{0j}^{k} = C_{j0}^{k} = \delta_j^k \tag{1.134}$$

以及

$$C_{il}^{m}C_{jk}^{l} = C_{lk}^{m}C_{ij}^{l} \tag{1.135}$$

二、Topological Twist

1. Topological Twist

回顾 R 对称性相关的超对称代数

$$[F_V, Q_\pm] = -Q_\pm, \quad [F_V, \bar{Q}_\pm] = \bar{Q}_\pm \tag{1.136}$$

$$[F_A, Q_\pm] = \mp Q_\pm, \quad [F_A, \bar{Q}_\pm] = \pm\bar{Q}_\pm \tag{1.137}$$

对世界面上的 $SO(1,1)$ 对称性，可以看做 $SO(2)_E$ 对称性并进行 Wick 转动形如

$$M_E = iM \tag{1.138}$$

原来的超对称代数此时变为

$$[M_E, Q_\pm] = \mp Q_\mp, \quad [M_E, \bar{Q}_\pm] = \mp\bar{Q}_\pm \tag{1.139}$$

所谓 Topological twist 即选取 $R = F_V$ 或 $R = F_A$ 其中之一加到 M_E 上，重定义 M_E 为

$$M_E' = M_E + R \tag{1.140}$$

这个式子可以被写成对能动张量 $T_{\mu\nu}$ 进行修改的形式

$$T_{\mu\nu}^{twisted} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(\epsilon_{\mu}^{\lambda}\partial_{\lambda}J_{\nu}^{R} + \epsilon_{\nu}^{\lambda}\partial_{\lambda}J_{\mu}^{R}) \tag{1.141}$$

由于 $SO(2)_E \simeq U(1)_E$，这相当于我们将 $U(1)_E \times U(1)_R$ 的子群 $U(1)_E'$ 将原来的 $U(1)_E$ 替代，即将 $U(1)_E'$ 作为新的世界面对称群 $SO(2)_E'$。而对于 A-twist，我们取 $R = F_V$，$U(1)_R = U(1)_V$。对于 B-twist，取 $R = F_A$，$U(1)_R = U(1)_A$。考虑一个手征超场 $\boldsymbol{\Phi}$，其中 $q_V = q_A = 0$，展开为

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi + \theta^{+}\psi_{+} + \theta^{-}\psi_{-} + \cdots \tag{1.142}$$

对 ϕ 的 $U(1)_V \times U(1)_A \times U(1)_E$ 荷为 $(0,0,0)$，在 twist 后 $U(1)_E'$ 荷仍为 0。而对 ψ_- 的荷为 $(-1,1,1)$，A-twist 后 $U(1)_E'$ 荷为 0，B-twist 后 $U(1)_E'$ 荷为 2。对 $\bar{\psi}_-$ 的荷为 $(1,-1,1)$，A-twist 后 $U(1)_E'$ 荷为 2，B-twist 后 $U(1)_E'$ 荷为 0。同理也可知 $\psi_+, \bar{\psi}_+$ 在 A，B-twist 后的 $U(1)_E'$ 荷。总结于下表。

表 1.1　费米场在 Topological twist 后变换

	$U(1)_V$	$U(1)_A$	$U(1)_E$	A-twist $U(1)_E'$	B-twist $U(1)_E'$
ϕ	0	0	0	0	0
ψ_-	-1	1	1	0	2
ψ_+	-1	-1	-1	-2	-2
$\bar{\psi}_+$	1	1	-1	0	0
$\bar{\psi}_-$	1	-1	1	2	0

同时超荷的 $U(1)_E'$ 荷也会在 twist 后同样改变，如下表所示

表 1.2　超荷在 Topological twist 后变换

	$U(1)_V$	$U(1)_A$	$U(1)_E$	A-twist $U(1)_E'$	B-twist $U(1)_E'$
Q_-	-1	1	1	0	2
Q_+	-1	-1	-1	-2	-2
$\bar{Q}_+$	1	1	-1	0	0
$\bar{Q}_-$	1	-1	1	2	0

由于物理态定义为 Q 的上同调类，chiral 和 twisted chiral 算符定义为与 Q 对易的算符。因此 Topological twist 之后改变了对物理态和理论中的算符的定义，一种从已知的算符构造更多的算符的方法是所谓的下降关系（descent relations）：对 $\mathcal{O}^{(0)} = \mathcal{O}$ 为一个 Q 闭的算符，则可以找到 1 形式（1-form）算符 $\mathcal{O}^{(1)}$ 和 2 形

式算符 $\mathcal{O}^{(2)}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&[Q, \mathcal{O}^{(0)}] = 0 \\
&\{Q, \mathcal{O}^{(1)}\} = d\mathcal{O}^{(0)} \\
&[Q, \mathcal{O}^{(2)}] = d\mathcal{O}^{(1)} \\
&d\mathcal{O}^{(2)} = 0
\end{aligned}
\tag{1.143}
$$

对 B twist，具体的构造为（对 A twist 则将 Q_- 换为 $\bar{Q}_-$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}^{(1)} &= idz[Q_-, \mathcal{O}] - id\bar{z}[Q_+, \mathcal{O}] \\
\mathcal{O}^{(2)} &= dzd\bar{z}\{Q_+, [Q_-, \mathcal{O}]\}
\end{aligned}
\tag{1.144}
$$

利用 Stokes 定理，上述构造使得

$$
\int_\gamma \mathcal{O}^{(1)} \quad \int_\Sigma \mathcal{O}^{(2)} \tag{1.145}
$$

均为 Q 闭的算符。

2. Witten 型拓扑场论

我们暂时不加证明的指出，不少具有 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称性的理论都满足

$$
T_{\mu\nu}^{twisted} = \{Q, G_{\mu\nu}\} \tag{1.146}
$$

其中 Q 对应于我们选择的 A 或 B twist，$G_{\mu\nu}$ 为费米型对称张量算符，即使得 Topological twist 之后的能动张量为一个 Q 恰当的量，这样的构造也称 Witten 型的拓扑场论。

考虑

$$
\delta\langle\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle = \langle\frac{1}{4\pi}\int \sqrt{h}d^2x\delta h^{\mu\nu}\{Q, G_{\mu\nu}\}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle \tag{1.147}
$$

若 $\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n$ 均为物理算符，则

$$
= \langle\frac{1}{4\pi}\int \sqrt{h}d^2x\delta h^{\mu\nu}\{Q, G_{\mu\nu}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\}\rangle = 0 \tag{1.148}
$$

由于 Q 此时作为一个对称性算符。

3. 拓扑场论与参数的形变

上述说明了拓扑场论的关联函数和配分函数等物理量不依赖世界面的度规选取，我们也可以说明对于 B twist 的拓扑场论，这些物理量不依赖除了 chiral 参数之外的参数，而对 A twist 的拓扑场论，这些物理量不依赖除了 twisted chiral 参数之外的参数。

我们对 B twist 的拓扑场论进行分析，此时理论有 D term 参数，F term 参数和 twisted F term 参数。其中对 D term 参数的形变

$$\int d^4\theta \Delta K = \int d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- d\theta^- d\theta^+ \Delta K \tag{1.149}$$

利用 $\bar{Q}_\pm$ 和 Grassman 积分的定义，上述积分正比于

$$\left\{\bar{Q}_+, \left[\bar{Q}_-, \int d\theta^+ d\theta^- \Delta K|_{\bar{\theta}^\pm=0}\right]\right\} = \left\{Q, \left[\bar{Q}_-, \int d\theta^+ d\theta^- \Delta K|_{\bar{\theta}^\pm=0}\right]\right\} \tag{1.150}$$

是一个 Q 恰当的项。对 twisted chiral 和 anti twisted chiral 的证明是类似的，如对 twisted chiral 项的形变为

$$\int \sqrt{h} d^2 x \int d^2\tilde{\theta} \Delta \tilde{W}(\tilde{\Phi}) \propto \int \sqrt{h} d^2 x \left\{Q_+, \left[\bar{Q}_-, \Delta \tilde{W}(\tilde{\Phi})\right]\right\} \tag{1.151}$$

其中 $\tilde{W}(\tilde{\Phi})$ 是 Q_A 闭，即 $\bar{Q}_+$ 和 Q_- 闭的项，由此可知

$$\left\{Q_+, \left[Q_-, \Delta \tilde{W}(\tilde{\Phi})\right]\right\} = \left\{Q_+, \left[Q_B, \Delta \tilde{W}(\tilde{\Phi})\right]\right\} \tag{1.152}$$

利用

$$\{A, [B, C]\} + \{B, [A, C]\} = [\{A, B\}, C] \tag{1.153}$$

则上式

$$= -\left\{Q_B \left[Q_+, \Delta \tilde{W}(\tilde{\Phi})\right]\right\} \tag{1.154}$$

对 anti chiral 和 anti twisted chiral 参数类似的有

$$\left\{\bar{Q}_+, \left[\bar{Q}_-, \Delta \bar{W}(\bar{\Phi})\right]\right\} = \left\{Q_B, \left[\bar{Q}_-, \Delta \bar{W}(\bar{\Phi})\right]\right\} \tag{1.155}$$

而对 chiral 参数则有

$$\int \sqrt{h} d^2 x \int d^2\theta \Delta W(\Phi) \propto \int \sqrt{h} d^2 x \left\{Q_+, \left[Q_-, \Delta W(\Phi)\right]\right\} \tag{1.156}$$

而这个是一个不平凡的形变，因此我们说明了 B twist 的模型只依赖 chiral 参数，同理 A twist 的模型只依赖 twisted chiral 参数。

4. 手征环与三点关联函数

我们先定义这一小节中所称之为三点关联函数的关联函数。取一个世界面为 $\Sigma = S^2$（因此也称亏格为 0 的三点关联函数）的模型并引入 Topological twist，并在世界面的三个不同点上放手征环的基

$$C_{ijk} = \langle \phi_i \phi_j \phi_k \rangle_0 \tag{1.157}$$

将其中一个 ϕ_i 设为 1，也可得两点关联函数

$$\eta_{ij} = \langle \phi_i \phi_j \rangle_0 \tag{1.158}$$

将此视为参数空间上的度规，并计这个矩阵的逆 $\eta^{ij}\eta_{jk}=\delta^i_k$。回顾之前假设的

$$\phi_i\phi_j = C^k_{ij}\phi_k + [Q,\Lambda] \tag{1.159}$$

这给出

$$C_{ijk} = \langle\phi_i\phi_j\phi_k\rangle_0 = \langle\phi_i(\phi_l C^l_{jk} + [Q,\Lambda])\rangle_0 = \langle\phi_i\phi_l\rangle_0 C^l_{jk} = \eta_{il}C^l_{jk} \tag{1.160}$$

同理有 $C^i_{jk}=\eta^{il}C_{ljk}$，这说明 C_{ijk} 的指标可以用这个参数空间上的度规进行升降。这说明如果我们需要确定手征环的结构，我们只需要确定其三点关联函数，而其余参数均全纯地依赖这些手征超场。对 A twist 对应的 twisted chiral 环也有相同的结论。

三、Topological Twist 存在条件

我们在第一节已经知道的 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称场论的模型是非线性 Sigma 模型、Landau-Ginzburg 模型和线性 Sigma 模型，其中线性 Sigma 模型给出了前两种模型统一的描述。我们可以先分析这些模型何时可以进行 Topological twist，再进行手征环的具体计算。

对于以 K*ä*hler 空间为 target space 的非线性 Sigma 模型，我们知道矢量 R 对称性 $U(1)_V$ 无反常，而轴向 R 对称性 $U(1)_A$ 无反常的条件取决于非线性 Sigma 模型依赖的 target space 的 $c_1(M)$。因此依赖矢量 R 对称性的 A twist 始终可以定义，而仅有 $c_1(M)=0$ 时才可以定义 B twist。

对于有 N 个手征物质超场的线性 Sigma 模型，仅在 $\sum_{i=1}^N Q_i=0$ 的时候可以定义 B twist。

对 Landau-Ginzburg 模型，矢量 R 对称性无反常的条件是超势是 quasi-homogeneous 的（即在矢量 R 对称性下有 2 的荷），即此时才可以 A twist，同时也需要要求 target space 是 $c_1(M)=0$ 才可以进行 B twist。

四、非线性 Sigma 模型的 A twist

Topological twist 对一个具体的模型的改变即在不改变一些费米子场的自由度的同时改变其变换性质，此时 $\psi_-,\bar\psi_+$ 在 A twist 后 $U(1)'_E$charge 为 0，而 $\bar\psi_-,\psi_+$ 此时为 2,-2。即 $\psi_-,\bar\psi_+$ 此时为标量，而 $\bar\psi_-,\psi_+$ 此时分别为反全纯和全纯的 1 形式。我们常把这些场替换来说明他们的变换性质改变

$$\begin{aligned}\chi^i &:= \psi^i_- \quad \chi^{\bar i} := \bar\psi^{\bar i}_+\\ \rho^{\bar i}_z &:= \bar\psi^{\bar i}_- \quad \rho^i_{\bar z} := \psi^i_+\end{aligned} \tag{1.161}$$

非线性 Sigma 模型的作用量在替换后为

$$S=\int d^2z\{g_{i\bar{j}}h^{\mu\nu}\sqrt{h}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\bar{\phi}^{\bar{j}}-ig_{i\bar{j}}\rho_z^{\bar{j}}D_{\bar{z}}\chi^i$$
$$+ig_{i\bar{j}}\rho_{\bar{z}}^iD_z\chi^{\bar{j}}-\frac{1}{2}R_{i\bar{k}j\bar{l}}\rho_{\bar{z}}^i\chi^j\rho_z^{\bar{k}}\chi^{\bar{l}}\} \tag{1.162}$$

此时的超对称变换由 $\delta=\bar{\epsilon}_-\bar{Q}_++\epsilon_+Q_-$ 生成，变换关系展开为

$$\begin{aligned}
&\delta\phi^i=\epsilon_+\chi^i && \delta\bar{\phi}^{\bar{i}}=\bar{\epsilon}_-\chi^{\bar{i}}\\
&\delta\rho_{\bar{z}}^i=2i\bar{\epsilon}_-\partial_{\bar{z}}\phi^i+\epsilon_+\Gamma^i_{jk}\rho_{\bar{z}}^j\chi^k && \delta\chi^{\bar{i}}=0\\
&\delta\chi^i=0 && \delta\rho_z^{\bar{i}}=-2i\epsilon_+\partial_z\bar{\phi}^{\bar{i}}+\bar{\epsilon}_-\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}\rho_z^{\bar{k}}\chi^{\bar{j}}
\end{aligned} \tag{1.163}$$

1. Target Space 上同调类与 Q_A-上同调类

我们现在说明 Target Space 上同调类（de Rham 上同调类）和 Q_A 构造的物理算符的上同调类是对应的。得出这一个结论的主要原因是由上文所述的超对称变换，

$$\begin{aligned}
&\delta\phi^i=\epsilon_+\chi^i && \delta\bar{\phi}^{\bar{i}}=\bar{\epsilon}_-\chi^{\bar{i}}\\
&\delta\chi^i=0 && \delta\chi^{\bar{i}}=0
\end{aligned} \tag{1.164}$$

且如果我们将 $\chi^i,\chi^{\bar{i}}$ 场做以下对应

$$\chi^i\longleftrightarrow dz^i\quad \chi^{\bar{i}}\longleftrightarrow d\bar{z}^{\bar{i}} \tag{1.165}$$

并组合 $\chi^i,\chi^{\bar{i}}$ 场和 ϕ 场，则一般的可以做以下对应（其中 $dz^i,d\bar{z}^{\bar{i}}$ 为 target space 的余切矢）

$$\omega_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}(\phi)\chi^{i_1}\cdots\chi^{i_p}\chi^{\bar{j}_i}\cdots\chi^{\bar{j}_q}$$
$$\longleftrightarrow\omega_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}(z)dz^{i_1}\cdots dz^{i_p}d\bar{z}^{\bar{j}_1}\cdots d\bar{z}^{\bar{j}_q} \tag{1.166}$$

通过这样的对应，我们就可以验证超荷 $Q_-,\bar{Q}_+$ 作用在这些场的组合的关系也可以进行对应

$$Q_-\longleftrightarrow\partial\quad\bar{Q}_+\longleftrightarrow\bar{\partial} \tag{1.167}$$

因此

$$Q_A\longleftrightarrow d=\partial+\bar{\partial} \tag{1.168}$$

这就说明了同调类之间的对应，$Q_-,\bar{Q}_+$ 对应于 Dolbeault 算符，因此 $Q_-,\bar{Q}_+$ 诱导的链可以定义 Dolbeault 上同调，Q_A 对应于 de Rham 算符，因此 A twist 下的

所有物理算符构成的上同调类即 target space 的 de Rham 同调类

$$\{physical\ operator\} \simeq H^*_{dR}(X) \tag{1.169}$$

我们可以注意到，上面我们进行对应的场 $\phi, \chi^i, \chi^{\bar{i}}$ 均为 Topological twist 之后的标量场，这说明我们此时进行对应的算符也均为对应到局域的某一点上的标量算符。

某种对 Q 的上同调类的有用的表达方式是依赖 target space 的同调类的。对 D 为同调类 H_r 中的元素，其 Poincare 对偶为上同调类 H^r 中的元素，对应于场算符 $\mathcal{O}_D$。对于任何一点 $x \in \Sigma$，如果 $\phi(x) \notin D$ 则 $\mathcal{O}_D(x) = 0$。

2. 关联函数

对于关联函数

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\rho \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s e^{-S} \tag{1.170}$$

对所有可能的 $\phi : \Sigma \to X$ 进行积分，我们先对 ϕ 进行分类

$$\beta = \phi_*[\Sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z}) \tag{1.171}$$

因此上述路径积分可以变成对不同的类的 ϕ 的积分的求和

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s \rangle = \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} \int_{\phi_*[\Sigma]=\beta} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\rho \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s e^{-S} := \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s \rangle_\beta \tag{1.172}$$

现在回顾矢量 R 对称性和轴向 R 对称性的反常并由此给出关联函数非 0 的条件，对关联函数的第 i 个算符 $\mathcal{O}_i$，对应于 target space 的一个微分形式

$$\mathcal{O}_i \longleftrightarrow \omega_i \in H^{p_i, q_i}(X) \tag{1.173}$$

利用 ψ_- 和 $\bar{\psi}_+$ 在矢量 R 对称性和轴向 R 对称性下的变换性质，此时算符 $\mathcal{O}_i$ 有矢量 R 对称性和轴向 R 对称性的荷

$$q_{V,i} = -p_i + q_i \quad q_{A,i} = p_i + q_i \tag{1.174}$$

由于矢量 R 对称性无反常，此时整个关联函数应该

$$\sum_{i=1}^{s} q_{V,i} = 0 \tag{1.175}$$

即

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = \sum_{i=1}^{s} q_i \tag{1.176}$$

由于此时进行的是 A twist，因此轴向 R 对称性一般存在反常，而这个反常可以通过指标定理进行计算

$$\begin{aligned}
&\#(\chi\ zero\ modes) - \#(\rho\ zero\ modes) \\
&= \#(\chi\ zero\ modes) \\
&= 2\int_{\Sigma} ch(\phi^{*}TX^{(1,0)})td(\Sigma) = 2\int_{\Sigma} \phi^{*}c_1(X) + 2dimX(1-g) \\
&= 2c_1(X)\cdot\phi_{*}[\Sigma] + 2dimX(1-g) \\
&= 2c_1(X)\cdot\beta + 2dimX(1-g)
\end{aligned} \tag{1.177}$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{s} p_i + \sum_{i=1}^{s} q_i = 2c_1(X)\cdot\beta + 2dimX(1-g) \tag{1.178}$$

即仅有

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = \sum_{i=1}^{s} q_i = c_1(X)\cdot\beta + dimX(1-g) \tag{1.179}$$

成立时关联函数非 0，这个条件在一些文献中也称之为选择定则（Selection rule）。

3. 超对称局部化在此时的应用

超对称局部化对一些超对称模型是极其有用的，我们此时也可以应用超对称局部化的思想，即只有使得

$$\delta\rho^{i}_{\bar{z}} = \delta\rho^{\bar{i}}_{z} = 0 \tag{1.180}$$

的场构型对关联函数的计算有贡献，即

$$\partial_{\bar{z}}\phi^{i} = 0 \tag{1.181}$$

这意味着对确定了世界面的度规，作为 $\phi : \Sigma \to X$ 或者作为 X 的坐标，映射 ϕ 是全纯的。另一个提示我们关于全纯映射的地方是对于作用量的一个技巧

$$\begin{aligned}
S_{bosonic} &= \int_{\Sigma} d^2z g_{i\bar{j}}(\partial_z\phi^{i}\partial_{\bar{z}}\bar{\phi}^{\bar{j}} + \partial_{\bar{z}}\phi^{i}\partial_z\bar{\phi}^{\bar{j}}) \\
&= 2\int_{\Sigma} d^2z g_{i\bar{j}}\partial_{\bar{z}}\phi^{i}\partial_z\bar{\phi}^{\bar{j}} + \int_{\Sigma}\phi^{*}\omega \geqslant \int_{\Sigma}\phi^{*}\omega = \omega\cdot\beta
\end{aligned} \tag{1.182}$$

而取等条件是 ϕ 为全纯映射，如果此时加上 B 场，则

$$S_{bosonic} = \int_{\Sigma}\phi^{*}(\omega - iB) = (\omega - iB)\cdot\beta \tag{1.183}$$

加上之前对 ϕ 的分类 $\phi_{*}[\Sigma] = \beta$，则局部化后的 ϕ 的模空间为

$$\mathcal{M}_{\Sigma}(X,\beta) = \left\{\phi : \Sigma \to X | \partial_{\bar{z}}\phi^{i}, \phi_{*}[\Sigma] = \beta\right\} \tag{1.184}$$

对于定义关联函数的路径积分此时变为在 $\mathcal{M}_\Sigma(X,\beta)$ 上的积分，而关联函数中的算符 $\mathcal{O}_i(x_i)$ 由于对应到一个上同调类的微分形式 $\omega_i \in H^*(X)$ 上来，因此在积分中常用赋值映射（evaluation map）进行定义，其中赋值映射的定义为

$$\begin{aligned} ev_i : \mathcal{M}_\Sigma(X,\beta) &\longrightarrow X \\ \phi &\longrightarrow \phi(x_i) \end{aligned} \tag{1.185}$$

在 β 类中的关联函数为

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s \rangle_\beta = e^{-(\omega - iB)\cdot\beta} \int_{\mathcal{M}_\Sigma(X,\beta)} ev_1^* \omega_1 \wedge \cdots ev_s^* \omega_s \tag{1.186}$$

不加证明的给出结论，对 $D_1, \cdots, D_s$ 为 $[\omega_1], \cdots, [\omega_s]$ 的 Poincare 对偶，上式中的积分可以有明确的几何意义

$$n_{\beta, D_1, \cdots, D_s} := \#\left\{\phi : \Sigma \to X | \partial_{\bar{z}} \phi^i = 0, \phi(x_i) \in D_i, \phi_*[\Sigma] = \beta, \forall i\right\} \tag{1.187}$$

即对满足右侧条件的所有映射 ϕ 的计数，而关联函数也变成这样的映射的计数结果的生成函数

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s \rangle = \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} e^{-(\omega - iB)\cdot\beta} n_{\beta, D_1, \cdots, D_s} \tag{1.188}$$

4. A model 的其他一些结论

我们在略失数学严谨性的情况下继续给出 A model 的一些结论。限制在映射的像 $\phi(\Sigma)$ 上的 K$\ddot{o}$hler 形式是半正定的，因此使得

$$\omega \cdot \phi_*[\Sigma] = \omega \cdot \beta \geqslant 0 \tag{1.189}$$

上述不等式仅在 $\beta = 0$ 时，即 $\phi(\Sigma)$ 为一个点时取等。在此时也有

$$\mathcal{M}_\Sigma(X,0) \simeq X \quad ev_i = id_X \tag{1.190}$$

关联函数退化为经典的相交理论（intersection theory）的计算

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_s \rangle_0 = \int_X \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_s = \#(D_1 \cap \cdots \cap D_s) \tag{1.191}$$

由于 $\beta = 0$ 时的世界面是 $g = 0$ 的球面，我们在 β 非平凡的关联函数可以看成某种非平凡的世界面，即对经典的相交数的量子贡献。

之前已经指出过三点关联函数退化到模空间度规

$$\eta_{ij} = \langle 1 \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \rangle_0 = \int_X \omega_i \wedge \omega_j \tag{1.192}$$

这个模空间度规无量子修正。

五、Landau-Ginzburg 模型和非线性 Sigma 模型的 B twist

1. Landau-Ginzburg 模型的 B twist

类似 A twist，B twist 也是改变费米子 $\psi_\pm$ 和 $\bar{\psi}_\pm$ 的自旋，此时 $\psi_\pm^i$ 分别变为全纯和反全纯的 1 形式，$\bar{\psi}_\pm$ 变为标量。除此之外，Landau-Ginzburg 模型同时也加入了一个以 Calabi-Yau 坐标为函数的超势

$$W : M \to \mathbb{C} \tag{1.193}$$

我们也引入类似的替换并写出作用量，

$$\begin{aligned} \psi^{\bar{i}} &:= \bar{\psi}_-^{\bar{i}} & \bar{\psi}^{\bar{i}} &:= \bar{\psi}_+^{\bar{i}} \\ \rho_z^i &:= \psi_-^i & \rho_{\bar{z}}^i &:= \psi_+^i \end{aligned} \tag{1.194}$$

作用量为

$$\begin{aligned} S = \int d^2z(&g_{i\bar{j}}\sqrt{h}h^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\bar{\phi}^{\bar{j}} - ig_{i\bar{j}}\psi^{\bar{j}}D_{\bar{z}}\rho_z^i \\ &+ ig_{i\bar{j}}\bar{\psi}^{\bar{j}}D_z\rho_{\bar{z}}^i - \frac{1}{2}R_{i\bar{k}j\bar{l}}\rho_{\bar{z}}^i\rho_z^j\psi^{\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{l}} \\ &+ \frac{1}{8}g^{\bar{j}i}\partial_{\bar{j}}\bar{W}\partial_i W + \frac{1}{4}(D_i\partial_j W)\rho_{\bar{z}}^i\rho_z^j + \frac{1}{4}(D_{\bar{i}}\partial_{\bar{j}}\bar{W})\psi^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}) \end{aligned} \tag{1.195}$$

B twist 中的超对称变换为 $\delta = \bar{\epsilon}_-\bar{Q}_+ - \bar{\epsilon}_+\bar{Q}_-$，由此可以得到具体的超对称变换

$$\begin{aligned} &\delta\phi^i = 0 & &\delta\bar{\phi}^{\bar{i}} = -\bar{\epsilon}_+\psi^{\bar{i}} + \bar{\epsilon}_-\bar{\psi}^{\bar{i}} \\ &\delta\rho_{\bar{z}}^i = 2i\bar{\epsilon}_-\partial_{\bar{z}}\phi^i & &\delta\bar{\psi}^{\bar{i}} = \bar{\epsilon}_+(-\frac{1}{2}g^{\bar{i}j}\partial_j W + \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}\bar{\psi}_-^{\bar{j}}\bar{\psi}_+^{\bar{k}}) \\ &\delta\rho_z^i = 2i\bar{\epsilon}_+\partial_z\phi^i & &\delta\psi^{\bar{i}} = \bar{\epsilon}_-(-\frac{1}{2}g^{\bar{i}j}\partial_j W + \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}\bar{\psi}_-^{\bar{j}}\bar{\psi}_+^{\bar{k}}) \end{aligned} \tag{1.196}$$

对 Q_B，我们只需取 $\bar{\epsilon}_+ = -\bar{\epsilon}_- = \bar{\epsilon}$，上述变换写为

$$\begin{aligned} &\delta\phi^i = 0 & &\delta\bar{\phi}^{\bar{i}} = -\bar{\epsilon}(\psi^{\bar{i}} + \bar{\psi}^{\bar{i}}) \\ &(\psi^{\bar{i}} - \bar{\psi}^{\bar{i}}) = \bar{\epsilon}g^{\bar{i}j}\partial_j W & &\delta(\psi^{\bar{i}} + \bar{\psi}^{\bar{i}}) = 0 \\ &\delta\rho_\mu^i = -2\bar{\epsilon}J_\mu^\nu\partial_\nu\Phi^i \end{aligned} \tag{1.197}$$

因此物理的（满足手征条件）的算符为那些 ϕ^i 的全纯函数。由于

$$v^i\frac{\partial W}{\partial\phi^i}\delta\phi^i = 0 \tag{1.198}$$

一个可以写成 $v(W)$，对 v 为一个全纯向量场的函数均为 Q_B 恰当的。我们由此得到 target space 为 $\mathbb{C}^n$ 时的手征环

$$chiral\ ring = \mathbb{C}[\phi^i, \cdots, \phi^n]/(\partial_i W) \tag{1.199}$$

同时我们记对函数 f 对应的算符为 O_f。

2. B twist Landau Ginzburg 理论的关联函数与超对称局部化

对关联函数

$$\langle O_{f_1}\cdots O_{f_s}\rangle=\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\rho e^{-S}O_{f_1}\cdots O_{f_s} \tag{1.200}$$

利用超对称局部化原理，此时的路径积分会局部化到

$$\partial_\mu\phi^i=0\quad\partial_iW=0 \tag{1.201}$$

而这是一个到 W 的极值点 $\partial_iW=0$ 的常值映射！这说明这个理论的局部化可以极大简化计算。我们假设满足 $\partial_iW=0$ 的极值点为 $\{y_1,\cdots,y_N\}$，则关联函数为

$$\langle O_{f_1}\cdots O_{f_s}\rangle=\sum_{i=1}^{N}\langle O_{f_1}\cdots O_{f_s}\rangle|_{y_i} \tag{1.202}$$

由于算符都是常值映射，此时

$$\langle O_{f_1}\cdots O_{f_s}\rangle|_{y_i}=f_1(y_i)\cdots f_s(y_i)\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\rho e^{-S} \tag{1.203}$$

配分函数可以直接用路径积分的通常手段

$$\begin{aligned}\int d^{2n}\phi e^{-\frac{1}{4}g^{i\bar{j}}\partial_iW\partial_{\bar{j}}W}&=\frac{1}{|\det\partial_i\partial_jW|^2(y_i)}\\ \int d^n\bar{\psi}d^n\psi e^{-\frac{1}{2}\partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{j}}\bar{W}\psi^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}}&=\det\partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{j}}\bar{W}(y_i)\\ \int d^{ng}\rho d^{ng}\bar{\rho}e^{-\frac{1}{2}\partial_i\partial_jW\rho^i_{\bar{z}}\rho^j_z}&=(\det\partial_i\partial_jW)^g(y_i)\end{aligned} \tag{1.204}$$

其中 n 为 ϕ 与 ψ 的零模数量，g 为 worldsheet 的亏格，因此

$$\langle O_{f_1}\cdots O_{f_s}\rangle=\sum_{i=1}^{N}f_1(y_i)\cdots f_s(y_i)(det\partial_i\partial_jW)^{g-1}(y_i) \tag{1.205}$$

我们由此得到对 $g=0$ 时的三点关联函数与模空间的度规

$$C_{ijk}=\sum_{dW=0}\frac{f_if_jf_k}{\det\partial_i\partial_jW}\quad\eta_{ij}=\sum_{dW=0}\frac{f_if_j}{\det\partial_i\partial_jW} \tag{1.206}$$

3. Calabi-Yau 非线性 Sigma 模型的 B twist

由于已经在前文中进行了对 Landau-Ginzburg 模型的 B twist，应用超势 $W=0$ 可以得到对应非线性 Sigma 模型的 B twist。此时仅有 $c_1(M)=0$ 的 Calabi-Yau target space 可以进行 B twist。

此时的超对称变换在应用 $W=0$ 的同时与 Landau-Ginzburg 模型的相同，这

时对 $\bar{\epsilon}_+ = -\bar{\epsilon}_- = \bar{\epsilon}$ 的 Q_B，

$$\begin{aligned} &\delta\phi^i = 0 && \delta\theta_i = 0 \\ &\delta\bar{\phi}^{\bar{i}} = \bar{\epsilon}\eta^{\bar{i}} && \delta\eta^{\bar{i}} = 0 \\ &\delta\rho^i_\mu = \pm 2i\bar{\epsilon}\partial_\mu\phi^i \end{aligned} \tag{1.207}$$

其中

$$\psi^{\bar{i}} + \bar{\psi}^{\bar{i}} = -\eta^{\bar{i}} \quad \psi^{\bar{i}} - \bar{\psi}^{\bar{i}} = g^{\bar{i}j}\theta_j \tag{1.208}$$

在这样重定义变量后使得我们选择满足物理条件的算符的选择多于 Landau-Ginzburg 模型时，这由于 $W = 0$，此时算符可以用 $\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{i}}, \eta^{\bar{i}}, \theta_i$，考虑到 $\delta\bar{\phi}^{\bar{i}} = \bar{\epsilon}\eta^{\bar{i}}$，我们可以做类似在非线性 Sigma 模型的 A twist 中所做的对应

$$\eta^{\bar{i}} \longleftrightarrow d\bar{z}^{\bar{i}} \quad \theta_i \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{1.209}$$

而算符一般可以写作

$$\omega^{j_1\cdots j_q}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p}(\phi,\bar{\phi})\eta^{\bar{i}_1}\cdots\eta^{\bar{i}_p}\theta_{j_1}\cdots\theta_{j_q} \longleftrightarrow \omega^{j_1\cdots j_q}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p}(z,\bar{z})d\bar{z}^{\bar{i}_1}\cdots d\bar{z}^{\bar{i}_p}\frac{\partial}{\partial z^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial z^{j_q}} \tag{1.210}$$

后者属于 $\Omega^{0,p}(M,\wedge^q T_M)$，而 Q_B 可以视作上链复形

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,0}(M,\wedge^q T_M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(M,\wedge^q T_M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,n}(M,\wedge^q T_M) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0 \tag{1.211}$$

的微分 $\bar{\partial}$，因此此时的手征环同构于

$$\bigoplus_{p,q=0}^{n} H^{0,p}(M,\wedge^q T_M) \tag{1.212}$$

4. Calabi-Yau 非线性 Sigma 模型的关联函数与超对称局域化

对关联函数

$$\langle O_1\cdots O_s\rangle = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta e^{-S}O_1\cdots O_s \tag{1.213}$$

的费米子的 0 模进行计数，$U(1)_V$ 对称性说明仅有在

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = \sum_{i=1}^{s} q_i \tag{1.214}$$

时路径积分非 0，而 $U(1)_A$ 对称性说明仅有在

$$\sum_{i=1}^{s}(p_i + q_i) = 2n(1-g) \tag{1.215}$$

时路径积分非 0，其中 $n = \dim M$，g 为世界面亏格。显然在 $g > 1$ 时所有这样的关联函数均为 0，理论此时极大简化。

我们可以在 $g = 0$ 时通过超对称局域化计算关联函数，此时满足

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = \sum_{i=1}^{s} q_i = n \tag{1.216}$$

超对称局域化到

$$\partial_\mu \phi^i = 0 \tag{1.217}$$

即常值映射上，由于 ϕ^i 为 target space 的坐标，因此满足这个条件的映射构成 target space 本身。路径积分约化到在 M 上的积分，我们期待对

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \omega_s \tag{1.218}$$

积分，但此时并不是可以做积分的 (n, n) 形式，因此利用 Calabi-Yau 上的典范形式 Ω 转化 ω 为

$$\omega \to \langle \omega, \Omega \rangle \wedge \Omega := \omega^{i_1 \cdots i_n}_{\bar{j}_1 \cdots \bar{j}_n} d\bar{z}^{\bar{j}_1} d\bar{z}^{\bar{j}_n} \Omega_{i_1 \cdots i_n} \wedge \Omega \tag{1.219}$$

因此关联函数为

$$\langle O_1 \cdots O_s \rangle = \int_M \langle \omega_1 \wedge \cdots \omega_s, \Omega \rangle \wedge \Omega \tag{1.220}$$

在人们所主要关注的 Calabi-Yau threefold 上，三点关联函数可以用 Beltrami 微分（Beltrami differentials）$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in H^1(M, T_M)$ 表达为

$$\langle O_1 O_2 O_3 \rangle = \int_M \mu_1^i \wedge \mu_2^i \wedge \mu_3^k \Omega_{ijk} \wedge \Omega \tag{1.221}$$

第三节　镜像对称性的物理论证

我们在此给出 Hori 和 Vafa 对镜像对称性的物理论证的类似版本。

首先我们会在有一个手征超场的 $U(1)$ 规范 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 理论中考虑一个利用 twisted chiral 场 Y 进行的等价描述，并说明这个等价描述来自 T 对偶。

然后我们推广上述模型到多个 (Φ_i, Q_i)，并由此构造 toric 簇相关的镜像对称性，可以进一步推广到超曲面作为 Calabi-Yau 构造的镜像对称性。

一、$2d$ $\mathcal{N} = (2, 2)$ 与 T 对偶

1. T 对偶 toy model

我们先在一个仅有标量动能项的 Sigma 模型中实现 T 对偶，考虑这时动力学场 ϕ 定义在 S^1 上因此 $\phi \sim \phi + 2\pi$，作用量为

$$\mathcal{L} = -\frac{R^2}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \tag{1.222}$$

同时考虑另一个作用量，此时引入了 1 形式 B_μ

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2R^2}(B_\mu)^2 + \epsilon^{\mu\nu}B_\mu\partial_\nu\phi \tag{1.223}$$

如果我们认为 B_μ 是辅助场，则此时可以得到

$$B^\mu = R^2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \tag{1.224}$$

这代入 $\mathcal{L}'$ 后回到 $\mathcal{L}$。如果我们将 ϕ 视作辅助场，则此时得到了

$$\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu B_\mu = 0 \tag{1.225}$$

在局部有形式解 $B_\mu = \partial_\mu\tilde{\phi}$，这代入 $\mathcal{L}'$ 可以得到

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2R^2}(\partial_\mu\tilde{\phi})^2 \tag{1.226}$$

2. 带 $U(1)$ 规范荷的 T 对偶 toy model

我们推广上述简单的模型，让复标量场 $\phi = \rho e^{i\varphi}$ 带有 $U(1)$ 规范荷，并对相位部分 φ 进行 T 对偶，因此与 φ 有关的部分是

$$\mathcal{L}_\varphi = -\rho^2(\partial_\mu\varphi + v_\mu)^2 \tag{1.227}$$

类似也可以构造

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4\rho^2}(B_\mu)^2 + \epsilon^{\mu\nu}B_\mu(\partial_\nu\varphi + v_\nu) \tag{1.228}$$

将 φ 看作辅助场可以得到 $B_\mu = \partial_\mu\tilde{\varphi}$，保持周期性 $\tilde{\varphi} \sim \varphi + 2\pi$，代回得到

$$\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}} = -\frac{1}{4\rho^2}(\partial_\mu\tilde{\varphi})^2 + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\varphi}v_\nu = -\frac{1}{4\rho^2}(\partial_\mu\tilde{\varphi})^2 - \tilde{\varphi}v_{01} \tag{1.229}$$

与 φ 对偶的 $\tilde{\varphi}$ 可以视作带有动力学的规范场 θ 项系数。后面我们将看到这样的方法可以进一步推广到 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称的 $U(1)$ 规范理论。

3. chiral 和 twisted chiral 与 T 对偶

我们现在说明如果加上 $2d$ $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称性，如果对偶前的坐标在 chiral 超场 Φ 里面，对偶后的坐标在 twisted chiral 超场里面。T 对偶仍然要求我们的考虑的理论在类似于 S^1 结构上，但 $2d$ 使得此时为一个圆柱 $S^1\times\mathbb{R}$。我们假设此时超场 Φ 有周期性 $\Phi \sim \Phi + 2\pi i$，此时圆柱上的坐标均用复数表达。则考虑作用量

$$\mathcal{L}' = \int d^4\theta(-\frac{1}{4R^2}B^2 + \frac{1}{2}(\bar{\Phi}+\Phi)B) \tag{1.230}$$

此时 B 也是一个超场。我们可以先视 B 为辅助场，则得到

$$B = R^2(\Phi + \bar{\Phi}) \tag{1.231}$$

代回得到

$$\mathcal{L}=\int d^4\theta\frac{R^2}{2}\bar{\Phi}\Phi \tag{1.232}$$

如果此时将 $\Phi,\bar{\Phi}$ 视作辅助场，利用

$$\int d^4\theta\delta\Phi B=\int d^2\theta\delta\Phi(\frac{1}{4}\bar{D}_+\bar{D}_-B) \tag{1.233}$$

因此此时得到

$$\bar{D}_+\bar{D}_-B=D_+D_-B=0 \tag{1.234}$$

有形式解 $B=\tilde{\Phi}+\bar{\tilde{\Phi}}$，其中 $\tilde{\Phi}$ 是一个 twisted chiral 超场并且满足 $\tilde{\Phi}\sim\tilde{\Phi}+2\pi i$，将这个解代回原来的作用量得到

$$\tilde{L}=\int d^4\theta(-\frac{1}{2R^2}\bar{\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}) \tag{1.235}$$

T 对偶在将圆柱的半径从 $R\to\frac{1}{R}$ 的同时，将 chiral 超场 Φ 变为 twisted chiral 超场 $\tilde{\Phi}$，也可视为将原理论的超荷 $\bar{Q}_-$ 与对偶一侧理论的 Q_- 交换，即将 Q_B 变为 Q_A，这让我们意识到镜像对称性在本质上是 T 对偶的推广。

4. 线性 Sigma 模型与 T 对偶

我们现在进一步推广上述 T 对偶模型，将 T 对偶思想运用到线性 Sigma 模型里的 chiral 超场里面，此时 chiral 超场带有 $U(1)$ 规范荷，我们同样对其相位部分进行 T 对偶。这时对偶的场应该是一个 twisted chiral 场 Y，而对应于规范场强的则是 Σ，因此此时对偶后的 twisted 超势为

$$(QY-t)\Sigma \tag{1.236}$$

我们用 twisted chiral 详细说明这个过程，类似与 chiral 的情形，这时要求 $Y\sim Y+2\pi$ 并构造作用量，由于此时的对偶与规范场无关，我们暂时省略规范场的动能项 $-\frac{1}{2e^2}\bar{\Sigma}\Sigma$ 和仅依赖 Σ 的 twisted 超势 $-t\Sigma$

$$\mathcal{L}=\int d^4\theta(e^{2QV+B}-\frac{1}{2}(Y+\bar{Y})B) \tag{1.237}$$

如果将 Y 看作辅助场则类似 chiral 得到

$$\bar{D}_+D_-B=D_+\bar{D}_-B=0 \tag{1.238}$$

可以解得 $B=\Psi\bar{\Psi}$，代入后换为 $\Phi=e^{\Psi}$ 得到

$$\mathcal{L}'=\int d^4\theta\bar{\Phi}e^{2QV}\Phi \tag{1.239}$$

如果将 B 看作辅助场则得到

$$B = -2QV + \ln(\frac{Y+\bar{Y}}{2}) \tag{1.240}$$

代入后得到

$$\mathcal{L}' = \int d^4\theta \left[QV(Y+\bar{Y}) - \frac{1}{2}(Y+\bar{Y})\ln(Y+\bar{Y})\right] \tag{1.241}$$

利用 $d^4\theta = -\frac{1}{4}d\theta^+ d\bar{\theta}^- \bar{D}_+ D_-$ 以及 Y 为 twisted chiral，可以得到

$$\int d^4\theta VY = \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}\Sigma Y \tag{1.242}$$

因此此时完整的对偶的作用量一侧可以写作

$$\mathcal{L}' = \int d^4\theta(-\frac{1}{2e^2}\bar{\Sigma}\Sigma - \frac{1}{2}(Y+\bar{Y})\ln(Y+\bar{Y})) + \frac{1}{2}(\int d^2\tilde{\theta}\Sigma(QY-t) + c.c) \tag{1.243}$$

另一侧为

$$\mathcal{L}' = \int d^4\theta(-\frac{1}{2e^2}\bar{\Sigma}\Sigma + \bar{\Phi}e^{2QV}\Phi) + \int d^2\theta(-t\Sigma) \tag{1.244}$$

这说明一个简短的对偶表达是

$$\bar{\Phi}e^V\Phi = Re(Y) \tag{1.245}$$

5. 超势与涡旋瞬子（Vortex Instanton）解

瞬子（Instanton）是一些理论的经典解，一般只参与对理论的非微扰贡献，涡旋瞬子（Vortex Instanton）即是特殊的一种瞬子解。

如果我们显式写出此时的超对称变换，根据超对称局部化原理，对路径积分有贡献的是使得费米子不变的场构型，此时的条件为

$$\begin{aligned} &\sigma = 0 \quad D_{\bar{z}}\phi = 0 \\ &v_{12} = e^2(|\phi|^2 - r_0) \end{aligned} \tag{1.246}$$

此时的 $D_{\bar{z}} = \frac{1}{2}D_+$，而 $v_{12} = iv_{01}$，因此此时的解也是理论的经典解，也是一个瞬子解。

所有这些解用他们的拓扑荷即瞬子数（Instanton Number）进行分类

$$c_1 = k = \frac{1}{2\pi}\int v_{12}d^2x \tag{1.247}$$

而我们主要感兴趣的是 $k=1$ 的解。由于理论此时的标量势

$$U(\phi) = \frac{e^2}{4\pi}(|\phi|^2 - r_0)^2 \tag{1.248}$$

而瞬子解需要使得这个标量势取极小值，即始终作为 $|z|^2 = r_0$ 这个圆的参数，但考虑到 ϕ 本身仍然是一个场，这样的构型就具有了一定的自由度，即从无穷远到平面的“中心”处

$$\phi : S^1_\infty \to S^1_{U=0} \tag{1.249}$$

可以有相位上的非平凡变化。由于（第二个等号由于无穷远处满足 $D_{\bar{z}} = 0$）

$$\frac{1}{2\pi}\int v_{12}d^2 = \int_{S^1_\infty} v = 1 \tag{1.250}$$

因此这样的相位不平凡性就是拓扑荷，而 $k = 1$ 的解也被称为涡旋瞬子解。这样的解的非微扰贡献会让我们的 twisted 超势增加一些项。

要说明这个瞬子解贡献的 twisted 超势的项并不是一个完全严格的论证，但我们可以从一个角度展开。由于我们已经说明 $Re(Y) = \bar{\Phi}e^V\Phi$ 是此时的对偶关系，而这两侧展开为 $y = \rho^2 - i\tilde{\varphi}$。此时的以某点为中心的涡旋可以在对偶后视为 $e^{i\tilde{\varphi}}$，而这与 e^{-Y} 项的标量部分有关。因此我们认为瞬子解对 twisted 超势的修正是

$$e^{-kY} \tag{1.251}$$

而涡旋瞬子解即 $k = 1$ 的 e^{-Y}。

二、Toric 簇的镜像对称性

我们现在考虑有 n 个 chiral 场 Φ_i 的 $U(1)^n$ 规范理论，其中第 i 个场在第 i 个 $U(1)$ 中有荷 Q_i，此时理论仅仅是前述理论的直接推广到 n 个 chiral 的版本。此时 Φ_i 在 T 对偶之后得到的 Y_i 有 twisted 超势

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^{n}(Q_iY_i - t_i)\Sigma_i + \sum_{i=1}^{n} e^{-Y_i} \tag{1.252}$$

此时模型是 n 个解耦的 $U(1)$ 理论，如果我们将其中 $n-1$ 个规范场变成非动力学场，即设他们的耦合常数 $e_i \to \infty$，$U(1)^n$ 经过重新组合只剩余一个 $U(1)$，而其余的 $U(1)$ 变为全局对称性，此时的 twisted 超势为

$$\tilde{W} = (\sum_{i=1}^{n} Q_iY_i - t)\Sigma + \sum_{i=1}^{n} e^{-Y_i} \tag{1.253}$$

此时进行了重定义

$$\Sigma_i = \Sigma \quad t = \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{1.254}$$

Σ 仍为动力学场，如果积分掉 Σ，则仅剩

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^{n} e^{-Y_i} \tag{1.255}$$

我们回顾之前对这个模型低能极限的分析，此时作为线性 Sigma 模型，在取一个真空构型并且取 $e \to \infty$ 极限时，可以获得 target space 为 $X = \mathbb{P}^{N-1}_{[Q_1,\cdots,Q_N]}$ 的非线性 Sigma 模型。而此时直接对线性 Sigma 模型进行 T 对偶，可以得到变量为 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的 Landau-Ginzburg 模型，同时有约束

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i Y_i = t \tag{1.256}$$

我们可以看一些例子

1. $\mathbb{CP}^{n-1}$

取线性 Sigma 为 $U(1)$ 规范群并有 n 个荷为 1 的手征场 Φ，回顾此时的真空模空间为

$$\left\{ (\phi_1, \cdots, \phi_N) | \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 = r \right\} / U(1) = \mathbb{CP}^{N-1} \tag{1.257}$$

因此在调整 $e \to \infty$ 极限下获得以 $\mathbb{CP}^{N-1}$ 为 target space 的非线性 Sigma 模型。对偶的 Landau-Ginzburg 模型用 $X_i = e^{-Y_i}$ 描述，利用 $\prod_i X_i = e^{-t}$ 的约束，此时的 twisted 超势为

$$\tilde{W}(X_i) = X_1 + \cdots + X_{n-1} + \frac{e^{-t}}{X_1 \cdots X_{n-1}} \tag{1.258}$$

$\mathbb{CP}^{N-1}$ 模型有轴向 R 对称性的反常，因此基态只有 N 个，这恰好对应于 $\tilde{W}$ 的 N 个极值点，即

$$X_i = \omega e^{-t/N} \tag{1.259}$$

其中 ω 为 N 次单位根。

三、超曲面的镜像对称性

第二章　镜像对称性的构造

我们已经知道镜像对称性叙述了 Calabi-Yau 流形甚至更一般的空间之间的联系，这种联系一旦建立，则可以通过较为方便计算的途径得到原本难以计算得到的不变量。因此一个主要的问题是，我们如何在找到一个 Calabi-Yau 流形或其他空间时，构造其对应的镜像对。我们在本章将叙述镜像对称性的应用以及镜像对构造的一些方法。

第一节　从物理叙述到几何叙述

一、镜像对称性作为 3 维 Calabi-Yau 流形的对称性

我们在第一章已经看到了通过 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称理论，特别是线性 Sigma 模型及其有关的非线性 Sigma 模型/Landau-Ginzburg 模型的对偶，论证了两个超对称理论及其所对应的 Calabi-Yau 空间存在联系。

我们现在尝试从弦紧致化的角度来具体到对（复）3 维的 Calabi-Yau 流形的讨论，进一步说明镜像对称性从物理角度的叙述。并且逐步接近我们之后会讨论到的拓扑弦理论。

1. 世界面 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数

在我们讨论一个具有 $N=2$ 世界面超对称的弦理论时，我们引入 $\mathcal{N}=2$ 超 Virasoro（SuperVirasoro）代数作为此时超共形代数的表达形式。$N=2$ 超 Virasoro 代数有四个局部算符（Local Operator）$\boldsymbol{T}(z), \boldsymbol{G}^{\pm}(z), \boldsymbol{J}(z)$，共形维度分别为 $\{2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\}$。其中 $\boldsymbol{G}^{\pm}$ 由 $\boldsymbol{G}^{1,2}(z)$ 组成，为超对称变换，$\boldsymbol{J}(z)$ 为 R 对称性，$\boldsymbol{T}(z)$ 为能动量算符。$\mathcal{N}=2$ 有 OPE（算符乘积展开），在进行模展开

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{A_n}{z^{n+h}} \quad A(z) = \boldsymbol{T}(z)\,, \boldsymbol{J}(z) \\
\boldsymbol{G}^{\pm}(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+v} \frac{\boldsymbol{G}_r^{\pm}}{z^{r+\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$\mathcal{N}=2$ 对称性让这里有一个 v 的自由参数，可以取 $v\in[0,1)$。当我们把模式展开代入 OPE 可以得到 $\mathcal{N}=2$ 的超 Virasoro 代数

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n} && [L_m, G_r^{\pm}] = (\frac{m}{2}-r)G_{m+r}^{\pm} \\
&\{G_r^+, G_s^-\} = 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2-1)\delta_{r,-s} && \{G_r^+, G_s^+\} = \{G_r^-, G_s^-\} = 0 \\
&[L_m, J_n] = -nJ_{m+n} && [J_m, G_r^{\pm}] = \pm G_{m+r}^{\pm} \\
&[J_m, J_n] = \frac{c}{3}m\delta_{m,-n}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

之所以我们限定 $v \in [0,1)$，是由于可以通过上述关系验证 v 和 $v+1$ 给出同构的代数。

2. 从 $\mathcal{N}=2$ 到 $\mathcal{N}=(2,2)$

我们用对共形场论一般的处理方法选取 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数的表示，先找到初级态（primary state），即满足

$$
\begin{gathered}
L_0|\mathcal{O}\rangle = h|\mathcal{O}\rangle \quad J_0|\mathcal{O}\rangle = q|\mathcal{O}\rangle \\
L_n|\mathcal{O}\rangle = G_r^{\pm}|\mathcal{O}\rangle = J_m|\mathcal{O}\rangle = 0 \quad \forall n,r,m>0
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

的态 $|\mathcal{O}\rangle$，依据共形场论的态-算符对应关系（state-operator correspondence），也可以写出对应算符 $\mathcal{O}(z)$ 的 OPE，我们不再赘述。我们要求此时的表示是幺正（unitary）的，即满足内积正定且

$$
L_n^{\dagger} = L_{-n} \quad (G_r^{\pm})^{\dagger} = G_{-r}^{\mp} \quad J^{\dagger} = J_{-n} \tag{2.4}
$$

在 $v=\frac{1}{2}$ 的 NS 区域，我们可以定义 chiral 和 anti chiral 的态，即 $G_{-1/2}^{+}|\mathcal{O}\rangle = 0$ 或 $G_{-1/2}^{-}|\mathcal{O}\rangle = 0$。我们不加证明的说明此时全体 chiral 或 anti chiral 态也可以构成环结构，且在一个幺正并且非简并的理论中，这个环是有限大的。

我们现在可以通过引入 $\tilde{G}^{\pm}(\bar{z})$ 推广理论到 $\mathcal{N}=(2,2)$，此时理论的初级场可以进一步有四种约束情况

$$
(c,c),(a,c),(c,a),(a,a) \tag{2.5}
$$

其中以 a 简记 anti chiral，c 简记 chiral，我们进一步引入此时等价于 Topological twist 的共轭条件

$$
(c,c) \simeq (a,a)^* \quad (a,c) \simeq (c,a)^* \tag{2.6}
$$

这样四个情况变为两个，恰好对应 A 和 B twist 后的两种 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称理论。但值得注意的是此时不仅只有 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称性，也有 $D=2$ 的共形对称性，

因此我们对初级场有关于 L_0 荷 h 和 J_0 荷 q 的不等式

$$h \geqslant \frac{|q|}{2} \tag{2.7}$$

而在 chiral 或 anti chiral 时取等 $\pm\frac{q}{2}$。这个不等式的证明是容易的，只需注意到

$$2h \mp q = \langle \mathcal{O}|(2L_0 \mp J_0)|\mathcal{O}\rangle = \langle \mathcal{O}|\{G^{\mp}_{1/2}, G^{\pm}_{-1/2}\}|\mathcal{O}\rangle = |G^{\pm}_{-1/2}|\mathcal{O}\rangle|^2 + |G^{\mp}_{1/2}|\mathcal{O}\rangle|^2 \geqslant 0 \tag{2.8}$$

我们也可以对幺正并且非简并的理论的 chiral 环的有限性给出一个叙述性的证明，对于一般的由初级场构成的 OPE

$$\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2) = \sum_i (z_1 - z_2)^{h_i - h_1 - h_2}\mathcal{O}_i(z_2) \tag{2.9}$$

二、Quintic 的例子

第三章　简介

第一节　一级节标题

一、二级节标题

1. 三级节标题

本模板 ustcthesis 是中国科学技术大学本科生和研究生学位论文的 LaTeX 模板，按照《中国科学技术大学研究生学位论文撰写手册》（最近在修订中，以下简称《撰写手册》）和《中国科学技术大学本科毕业论文（设计）格式》的要求编写。

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

第二节　脚注

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. [①]

[①] Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

第四章　插图和表格

第一节　三线表

三线表是《撰写手册》推荐使用的格式，如表 4.1。

表 4.1　表号和表题在表的正上方

Table 4.1　The English caption

类型	描述
挂线表	挂线表也称系统表、组织表，用于表现系统结构
无线表	无线表一般用于设备配置单、技术参数列表等
卡线表	卡线表有完全表，不完全表和三线表三种

如果有表注，推荐使用 threeparttable。这样可以与表格对齐，满足部分评审老师的要求。

表 4.2　带表注的表格

类型	描述
挂线表	挂线表也称系统表、组织表，用于表现系统结构
无线表	无线表一般用于设备配置单、技术参数列表等
卡线表	卡线表有完全表，不完全表和三线表三种

注：表注分两种，第一种是对全表的注释，用不加阿拉伯数字排在表的下边，前面加“注:”；第二种是和表内的某处文字或数字相呼应的注，在表里面用带圈的阿拉伯数字在右上角标出，然后在表下面用同样的圈码注出来

编制表格应简单明了，表达一致，明晰易懂，表文呼应、内容一致。排版时表格字号略小，或变换字体，尽量不分页，尽量不跨节。表格太大需要转页时，需要在续表上方注明“续表”，表头页应重复排出。

第二节　插图

有的同学可能听说“LaTeX 只能使用 eps 格式的图片”，甚至把 jpg 格式转为 eps。事实上，这种做法已经过时。而且每次编译时都要要调用外部工具解析 eps，导致降低编译速度。所以我们推荐矢量图直接使用 pdf 格式，位图使用 jpeg 或 png 格式。

图 4.1　图号、图题置于图的下方

Figure 4.1　The English caption

若有图注，图注置于图题下方。多个图注则须顺序编号，注序左缩进 2 字，与注文之间空一字符，续行悬挂缩进左对齐，两端对齐。注文的字数较少且是短语时，末尾不可加标点，多个图注可以在同一行通过自由选取字符空格将各个图注间隔开来；注文的字数较多或者甚至需要用句子说明时，该图注可以独立成行。

关于图片的并排，推荐使用较新的 subcaption 宏包，不建议使用 subfigure 或 subfig 等宏包。

第三节　算法环境

模板中使用 algorithm2e 宏包实现算法环境。关于该宏包的具体用法，请阅读宏包的官方文档。

注意，我们可以在论文中插入算法，但是插入大段的代码是愚蠢的。然而这并不妨碍有的同学选择这么做，对于这些同学，建议用 listings 宏包。

算法 4.1 算法示例 1

```
Data: this text
Result: how to write algorithm with LaTeX2e
initialization;
while not at end of this document do
    read current;
    if understand then
        go to next section;
        current section becomes this one;
    else
        go back to the beginning of current section;
    end
end
```

第五章　数学

第一节　数学符号

《撰写手册》要求数学符号遵循 GB/T 3102.11—1993《物理科学和技术中使用的数学符号》[①]。该标准参照采纳 ISO 31-11:1992[②]，但是与 TEX 默认的美国数学学会（AMS）的符号习惯有所区别。具体地来说主要有以下差异：

1. 大写希腊字母默认为斜体，如

$$\mathit{\Gamma\Delta\Theta\Lambda\Xi\Pi\Sigma\Upsilon\Phi\Psi\Omega}.$$

注意有限增量符号 Δ 固定使用正体，模板提供了 `\increment` 命令。

2. 小于等于号和大于等于号使用倾斜的字形 $\leqslant$、$\geqslant$。
3. 积分号使用正体，比如 $\int$、$\oint$。
4. 偏微分符号 ∂ 使用正体。
5. 省略号 `\dots` 按照中文的习惯固定居中，比如

$$1, 2, \cdots, n \quad 1 + 2 + \cdots + n.$$

6. 实部 Re 和虚部 Im 的字体使用罗马体。

以上数学符号样式的差异可以在模板中统一设置。但是还有一些需要用户在写作时进行处理：

1. 数学常数和特殊函数名用正体，如

$$\mathrm{\pi} = 3.14\cdots; \quad \mathrm{i}^2 = -1; \quad \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. 微分号使用正体，比如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。
3. 向量、矩阵和张量用粗斜体（`\symbf`），如 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{\Sigma}$、$\boldsymbol{T}$。
4. 自然对数用 $\ln x$ 不用 $\log x$。

模板中使用 unicode-math 宏包配置数学字体。该宏包与传统的 amsfonts、amssymb、bm、mathrsfs、upgreek 等宏包不兼容。本模板作了处理，用户可以直接使用 `\bm`, `\mathscr`, `\upGamma` 等命令。关于数学符号更多的用法，参见 unicode-math 宏包的使用说明和符号列表 unimath-symbols。

[①] 原 GB 3102.11—1993，自 2017 年 3 月 23 日起，该标准转为推荐性标准。
[②] 目前已更新为 ISO 80000-2:2019。

第二节　数学公式

数学公式可以使用 `equation` 和 `equation*` 环境。注意数学公式的引用应前后带括号，建议使用 `\eqref` 命令，比如式（5.1）。

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

多行公式尽可能在“=”处对齐，推荐使用 `align` 环境，比如式（5.3）。

$$\begin{aligned} a &= b + c + d + e \qquad (5.2) \\ &= f + g. \qquad (5.3) \end{aligned}$$

第三节　量和单位

量和单位要求严格执行 GB 3100～3102—1993 有关量和单位的规定。宏包 siunitx 提供了更好的数字和单位支持：

- 为了阅读方便，四位以上的整数或小数推荐采用千分空的分节方式：55 235 367.346 23。四位以内的整数可以不加千分空：1256。
- 数值与单位符号间留适当空隙：25.4 mm，5.97×10^{24} kg，−273.15 °C。例外：12.3°，1°2′3″。
- 组合单位默认使用 APS 的格式，即相乘的单位之间留一定空隙：$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$，也可以使用居中的圆点：$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$。GB 3100—1993 对两者都允许，建议全文统一设置。
- 量值范围使用“～”：10 mol/L～15 mol/L。
- 注意：词头 μ 不能写为 u，如：umol 应为 μmol、μmol。

第四节　定理和证明

示例文件中使用 amsthm 宏包配置了定理、引理和证明等环境。用户也可以使用 ntheorem 宏包。

定义 5.1　If the integral of function f is measurable and non-negative, we define its (extended) **Lebesgue integral** by

$$\int f = \sup_{g} \int g, \tag{5.4}$$

where the supremum is taken over all measurable functions g such that $0 \leqslant g \leqslant f$, and where g is bounded and supported on a set of finite measure.

假设 5.1 The communication graph is strongly connected.

例 5.1 Simple examples of functions on $\mathbb{R}^d$ that are integrable (or non-integrable) are given by

$$f_a(x) = \begin{cases} |x|^{-a} & \text{if } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{if } x > 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{1+|x|^a}, \qquad \text{all } x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.6}$$

Then f_a is integrable exactly when $a < d$, while F_a is integrable exactly when $a > d$.

引理 5.1 (Fatou) Suppose $\{f_n\}$ is a sequence of measurable functions with $f_n \geqslant 0$. If $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for a.e. x, then

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{5.7}$$

注 We do not exclude the cases $\int f = \infty$, or $\liminf_{n\to\infty} f_n = \infty$.

推论 5.2 Suppose f is a non-negative measurable function, and $\{f_n\}$ a sequence of non-negative measurable functions with $f_n(x) \leqslant f(x)$ and $f_n(x) \to f(x)$ for almost every x. Then

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f. \tag{5.8}$$

命题 5.3 Suppose f is integrable on $\mathbb{R}^d$. Then for every $\epsilon > 0$:

1. There exists a set of finite measure B (a ball, for example) such that

$$\int_{B^c} |f| < \epsilon. \tag{5.9}$$

2. There is a $\delta > 0$ such that

$$\int_E |f| < \epsilon \qquad \text{whenever } m(E) < \delta. \tag{5.10}$$

定理 5.4 Suppose $\{f_n\}$ is a sequence of measurable functions such that $f_n(x) \to f(x)$ a.e. x, as n tends to infinity. If $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, where g is integrable, then

$$\int |f_n - f| \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{5.11}$$

and consequently

$$\int f_n \to \int f \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{5.12}$$

证明 Trivial. ∎

Axiom of choice Suppose E is a set and E_α is a collection of non-empty subsets of E. Then there is a function $\alpha \mapsto x_\alpha$ (a “choice function”) such that

$$x_\alpha \in E_\alpha, \qquad \text{for all } \alpha. \tag{5.13}$$

Observation 1 Suppose a partially ordered set P has the property that every chain has an upper bound in P. Then the set P contains at least one maximal element.

A concise proof Obvious. ∎

第六章　引用文献的标注

模板使用 natbib 宏包来设置参考文献引用的格式，更多引用方法可以参考该宏包的使用说明。

第一节　顺序编码制

一、角标数字标注法

`\cite{knuth86a}`	⇒	[1]
`\citet{knuth86a}`	⇒	Knuth[1]
`\cite[42]{knuth86a}`	⇒	[1]42
`\cite{knuth86a,tlc2}`	⇒	[1-2]
`\cite{knuth86a,knuth84}`	⇒	[1,3]

二、数字标注法

`\cite{knuth86a}`	⇒	[1]
`\citet{knuth86a}`	⇒	Knuth [1]
`\cite[42]{knuth86a}`	⇒	[1]42
`\cite{knuth86a,tlc2}`	⇒	[1-2]
`\cite{knuth86a,knuth84}`	⇒	[1, 3]

第二节　著者-出版年制标注法

`\cite{knuth86a}`	⇒	Knuth (1986)
`\citep{knuth86a}`	⇒	(Knuth, 1986)
`\citet[42]{knuth86a}`	⇒	Knuth (1986)42
`\citep[42]{knuth86a}`	⇒	(Knuth, 1986)42
`\cite{knuth86a,tlc2}`	⇒	Knuth (1986); Mittelbach et al. (2004)
`\cite{knuth86a,knuth84}`	⇒	Knuth (1986, 1984)

参 考 文 献

[1] Knuth D E. Computers and typesetting: A the TEXbook[M]. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1986.

[2] Mittelbach F, Goossens M, Braams J, et al. The LATEX companion[M]. 2nd ed. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 2004.

[3] Knuth D E. Literate programming[J]. The Computer Journal, 1984, 27(2): 97-111.

[4] Lamport L. LATEX: a document preparation system[M]. 2nd ed. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1994.

[5] 孙立广. 极地科学前沿与热点：顶级期刊论文摘要汇编（1999—2010）[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2016: 222.

[6] 李永池. 张量初步和近代连续介质力学概论[M]. 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2016: 61.

[7] 刘景双. 湿地生态系统碳、氮、硫、磷生物地球化学过程[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.

[8] Crawford W, Gorman M. Future libraries: Dreams, madness, & reality[M]. Chicago: American Library Association, 1995.

[9] International Federation of Library Association and Institutions. Names of persons: National usage for entry in catalogues[M]. 3rd ed. London: IFLA International Office for UBC, 1977.

[10] 程根伟. 1998 年长江洪水的成因与减灾对策[M]//许厚泽, 赵其国. 长江流域洪涝灾害与科技对策. 北京: 科学出版社, 1999: 26-32.

[11] 陈晋镳, 张惠民, 朱士兴, 等. 蓟县震旦亚界研究[M]//中国地质科学院天津地质矿产研究所. 中国震旦亚界. 天津: 天津科学技术出版社, 1980: 56-114.

[12] Buseck P R, Nord G L, Jr., Veblen D R. Subsolidus phenomena in pyroxenes[M]//Prewitt C T. Pyroxenes. Washington, D.C.: Mineralogical Society of America, 1980: 117-212.

[13] Fourney M E. Advances in holographic photoelasticity[C]//American Society of Mechanical Engineers．Applied Mechanics Division．Symposium on Applica-

tions of Holography in Mechanics, August 23-25,1971,University of Southern California, Los Angeles, California. New York: ASME, 1971: 17-38.

[14] 孔庆勇, 郭红健, 孔庆和. 我国科技期刊的金字塔分层模型及发展路径初探[J]. 中国科技期刊研究, 2015, 26(10): 1100-1103.

[15] 杨洪升. 四库馆私家抄校书考略[J]. 文献, 2013(1): 56-75.

[16] 于潇, 刘义, 柴跃廷, 等. 互联网药品可信交易环境中主体资质审核备案模式[J]. 清华大学学报 (自然科学版), 2012, 52(11): 1518-1521.

[17] Des Marais D J, Strauss H, Summons R E, et al. Carbon isotope evidence for the stepwise oxidation of the proterozoic environment[J]. Nature, 1992, 359: 605-609.

[18] HEWITT J A. Technical services in 1983[J]. Library Resource Services, 1984.

[19] 丁文详. 数字革命与竞争国际化[N]. 中国青年报, 2000-11-20(15).

[20] 姜锡洲. 一种温热外敷药制备方案: 88105607.3[P]. 1989-07-26.

[21] 万锦坤. 中国大学学报论文文摘（1983–1993）（英文版）[DB/CD]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1996.

[22] Mlot C. Plant physiology: Plant biology in the Genome Era[J]. Science, 1998, 281: 331-332.

[23] 孙玉文. 汉语变调构词研究[D]. 北京: 北京大学, 2000.

[24] Cairns B R. Infrared spectroscopic studies of solid oxygen[D]. Berkeley: Univ. of California, 1965.

[25] 中国力学学会. 第 3 届全国实验流体力学学术会议论文集[C]. 天津, 1990.

[26] Rosenthall E M. Proceedings of the Fifth Canadian Mathematical Congress, University of Montreal, 1961[C]. Toronto: University of Toronto Press, 1963.

[27] Baker S K, Jackson M E. The future of resource sharing[M]. New York: The Haworth Press, 1995.

[28] 尼葛洛庞帝. 数字化生存[M]. 胡泳, 范海燕, 译. 海口: 海南出版社, 1996.

[29] 杨宗英. 电子图书馆的现实模型[J]. 中国图书馆学报, 1996(2): 24-29.

[30] 刘斌. 力学[M]. 合肥, 2014: 24-29.

[31] 刘文富, 顾丽梅. 网络时代经济发展战略特征[J]. 学术研究, 2000, 21(4): 35-40.

[32] 肖渡, 沈群红, 张芸, 等. 知识时代的企业合作经营[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 67-69.

[33] The White House. Technology for economic growth[R]. Washington, 1993.

[34] Hutson J M. Vibrational dependence of the anisotropic intermolecular potential of argon-hydrogen chloride[J]. J. Phys. Chem., 1992, 96(11): 4237-4247.

附录 A　Toric 簇

附录 B　线性 Sigma 模型的低能动力学

附录 C　补充材料

第一节　补充章节

补充内容。

致　谢

在研究学习期间，我有幸得到了三位老师的教导，他们是：我的导师，中国科大 XXX 研究员，中科院 X 昆明动物所马老师以及美国犹他大学的 XXX 老师。三位深厚的学术功底，严谨的工作态度和敏锐的科学洞察力使我受益良多。衷心感谢他们多年来给予我的悉心教导和热情帮助。

感谢 XXX 老师在实验方面的指导以及教授的帮助。科大的 XXX 同学和 XXX 同学参与了部分试验工作，在此深表谢意。

2025 年 10 月